7.1 El espacio dual

Funcionales lineales

Sabemos que cualquier campo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre si mismo. Las TLs de un espacio vectorial en el campo $\mathbb{K}$ son especialmente importantes por lo que tienen un nombre particular: **funcionales lineales**.

Más detalladamente, si $\mathfrak{E}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ entonces a las TLs $f : \mathfrak{E} \to \mathbb{K}$ se les llama funcionales lineales. No está demás recalcar aquí que los funcionales lineales son un caso muy particular de las TLs y por lo tanto todo lo que sabemos de las TLs se aplica a los funcionales lineales. En particular:

1. Sabemos sumar funcionales lineales y multiplicar escalares por funcionales lineales (**??** y **??**).
2. El conjunto de todas los funcionales lineales $\mathrm{Mor}\,(\mathfrak{E},\mathbb{K})$ es un espacio vectorial para la suma de funcionales lineales y el producto por escalares (**??**).

Al espacio $\mathrm{Mor}\,(\mathfrak{E},\mathbb{K})$ lo denotaremos por $\mathfrak{E}^{\#}$ y lo llamaremos el **espacio dual** de $\mathfrak{E}$. El porqué de este nombre lo aclarar emos un poco más adelante. Siguiendo la tradición a los vectores en el espacio dual los llamaremos **covectores**. Luego, el término "covector" es solamente un sinónimo de "funcional lineal".

El isomorfismo de un espacio con su dual

Algo muy importante que probamos en todo detalle para las TLs es que si le damos coordenadas a los espacios vectoriales escogiendo bases entonces, obtenemos por extensión lineal los isomorfismos

$$\mathrm{Mor}\,(\mathfrak{E},\mathfrak{F}) \leftrightarrow \mathrm{Mor}\left(\mathbb{K}^{\{N\}},\mathbb{K}^{\{M\}}\right) \leftrightarrow \left(\mathbb{K}^{\{M\}}\right)^{N}.$$

Si la TL es un covector entonces su codominio es $\mathbb{K}$ y esto se simplifica mucho ya que $\mathbb{K}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ tiene base canónica $M = \{1\}$. Así obtenemos que si N es una base de $\mathfrak{E}$ entonces

$$\mathfrak{E}^{\#} = \mathrm{Mor}\,(\mathfrak{E},\mathbb{K}) \leftrightarrow \mathrm{Mor}\left(\mathbb{K}^{\{N\}},\mathbb{K}\right) \leftrightarrow \mathbb{K}^{N} \supseteq \mathbb{K}^{\{N\}} \leftrightarrow \mathfrak{E}$$

En el caso de que la base N sea infinita entonces la contención $\mathbb{K}^{\{N\}} \subseteq \mathbb{K}^{N}$ es propia (no hay igualdad) y esto nos da una TL de $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{E}^{\#}$ que es inyectiva pero no sobreyectiva. Cuando la base N es finita entonces $\mathbb{K}^{\{N\}} = \mathbb{K}^{N}$ y obtenemos un isomorfismo no canónico entre $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#}$.

Pasemos a describir este isomorfismo con más detalle. Supongamos que $\mathfrak{E}$ es finito dimensional y sea N una de sus bases. Sea $f : \mathfrak{E} \to \mathbb{K}$ un covector y $\mathbf{x} \in \mathfrak{E}$ un vector. Como N es una base y f es una TL. Tenemos que

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{i\in N} x_i \mathbf{i}\right) = \sum_{i\in N} x_i f(\mathbf{i}) = \sum_{i\in N} f_i x_i$$

donde los x_i son las coordenadas de $\mathbf{x}$ en la base N y los f_i son los escalares $f(\mathbf{i})$.

Observese que si interpretamos a x como la variable de la función f entonces, los x_i son variables y la suma a la derecha es una forma lineal cuyos coeficientes son los f_i.

Esto nos da una función que a cada covector f le hace corresponder la forma lineal mencionada arriba. Esta función es biyectiva ya que su inversa es la que a una forma lineal le hace corresponder la *evaluación* de la forma lineal en las coordenadas de un vector. Más aún, es un isomorfismo de espacios vectoriales ya que

$$(f+g)(\mathbf{i}) = f(\mathbf{i}) + g(\mathbf{i}) = f_i + g_i$$
$$(\alpha f)(\mathbf{i}) = \alpha f(\mathbf{i}) = \alpha f_i$$

Como el espacio de formas lineales es canónicamente isomorfo a $\mathbb{K}^N$ obtenemos que $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#}$ son isomorfos (NO canónicamente).

La base dual

Sea $\mathfrak{E}$ un espacio vectorial (posiblemente de dimensión infinita) y sea N una de sus bases. Cualquier vector x se expresa de forma única como una *combinación lineal* (de soporte finito) de N. Los coeficientes de tal combinación lineal son *las coordenadas* del vector x en la base N. Hay una coordenada para cada vector de la base N

Ahora, sea $\mathbf{i}$ un vector en la base N y denotemos por $\mathbf{i}^{\blacktriangledown}(x) \in \mathbb{K}$ *a la coordenada de* x *correspondiente a* $\mathbf{i}$. Con esta notación nuestra combinación lineal se escribe como

$$x = \sum_{i \in N} \mathbf{i}^{\blacktriangledown}(x)\, \mathbf{i}$$

Obsérvese que si $\mathbf{j} \in N$ entonces para $\mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{j})$ hay dos posibilidades. Si $\mathbf{j} = \mathbf{i}$, entonces $\mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{j}) = 1$. Si $\mathbf{j} \neq \mathbf{i}$, entonces $\mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{j}) = 0$. Esto es muy claro si observamos cual es la coordenada de $\mathbf{j}$ correspondiente a $\mathbf{i}$. Esto se expresa de forma compacta como

$$\mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{j}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

La notación $\mathbf{i}^{\blacktriangledown}(x)$ sugiere que este es un elemento del campo el cual depende solo de $\mathbf{i}$ y de x. *Esto es falso*, $\mathbf{i}^{\blacktriangledown}(x)$ también depende de cual es la base N. Esto es así porque la relación entre un espacio y su dual no es canónica.

Ejercicio 1 Denotemos $\mathbf{i} = (1,0)$, $\mathbf{j} = (0,1)$ y $\mathbf{k} = (1,1)$. Los conjuntos $N = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ y $M = \{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ son dos bases de $\mathbb{R}^2$. Calcule $\mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{k})$ en las bases N y M. [11]

La función $\mathbf{i}^{\blacktriangledown} : \mathfrak{E} \ni x \longmapsto \mathbf{i}^{\blacktriangledown}(x) \in \mathbb{K}$ es un funcional lineal por la sencilla razón de que para sumar dos vectores hay que sumar sus coordenadas y para multiplicarlo por un escalar hay que multiplicar sus coordenadas por el escalar. Luego, $\mathbf{i}^{\blacktriangledown}$ es un covector en $\mathfrak{E}^{\#}$. Denotaremos $N^{\blacktriangledown} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}^{\blacktriangledown} \mid \mathbf{i} \in N\}$.

7.1 *El conjunto de covectores $N^{\blacktriangledown}$ es linealmente independiente.*

Prueba. Recalquemos que el cero en el espacio dual es la función $\mathbb{O}$ que a cada vector del espacio le hace corresponder el cero del campo. Supongamos que tenemos una combinación lineal $\mathbb{O} = \sum_{i \in N} \alpha_i \mathbf{i}^{\blacktriangledown}$. Para cualquier $\mathbf{j} \in N$ tenemos que

$$0 = \mathbb{O}(\mathbf{j}) = \left(\sum_{i \in N} \alpha_i \mathbf{i}^{\blacktriangledown}\right)(\mathbf{j}) = \sum_{i \in N} \alpha_i \mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{j}) = \sum_{i \in N} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$$

y esto prueba que todos los coeficientes de nuestra combinación lineal son cero. ■

7.2 *Si $\mathfrak{E}$ es de dimensión finita entonces, $N^{\blacktriangledown}$ genera a $\mathfrak{E}^{\#}$.*

Prueba. Sea $f \in \mathfrak{E}^{\#}$ un covector. Necesitamos convencernos que f es combinación lineal de $N^{\blacktriangledown}$. Como N es finito podemos definir el covector

$$g = \sum_{i \in N} f(\mathbf{i})\, \mathbf{i}^{\blacktriangledown}$$

que está en el subespacio generado por $N^{\blacktriangledown}$. Veamos que $f = g$.

Si $\mathbf{x} = \sum_{i \in N} \alpha_i \mathbf{i}$ es un vector arbitrario entonces

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} \alpha_i f(\mathbf{i}) = \sum_{i \in N} \mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{x})\, f(\mathbf{i}) = g(\mathbf{x}).$$

usando la definición de igualdad de funciones, obtenemos que $f = g$. ■

De 7.1 y 7.2 obtenemos que si el espacio es de dimensión finita entonces $N^{\blacktriangledown}$ es una base del espacio dual $\mathfrak{E}^{\#}$ llamada la **base dual** de N.

Ejercicio 2 Sea N una base del espacio $\mathfrak{E}$. Sea Σ la función que a cada vector en $\mathfrak{E}$ le hace corresponder la suma de sus coordenadas en la base N. Pruebe que Σ es un funcional lineal. Pruebe que si $\mathfrak{E}$ es de dimension infinita entonces $\Sigma \notin \langle N^{\blacktriangledown} \rangle$.

El problema de caracterizar al conjunto $\langle N^{\blacktriangledown} \rangle$ en espacios de dimension infinita es importante en Análisis Funcional. Por ejemplo, el Teorema de Representación de Riesz dice que en un espacio de Hilbert el conjunto $\langle N^{\blacktriangledown} \rangle$ es exactamente el conjunto de los funcionales lineales acotados.

La función $\blacktriangledown : N \ni \mathbf{i} \longmapsto \mathbf{i}^{\blacktriangledown} \in \mathfrak{E}^{\#}$ definida en la base N de $\mathfrak{E}$ la podemos extender por extensión lineal (véase la sección 3.3) a todo el espacio $\mathfrak{E}$. Por definición de extensión lineal, si $\mathbf{x} = \sum_{i \in N} \alpha_i \mathbf{i}$ entonces, $\mathbf{x}^{\blacktriangledown} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in N} \alpha_i \mathbf{i}^{\blacktriangledown}$ y la imagen de la función $\blacktriangledown : \mathfrak{E} \ni \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}^{\blacktriangledown} \in \mathfrak{E}^{\#}$ es el subespacio generado por $N^{\blacktriangledown}$.

La función $\blacktriangledown$ siempre es inyectiva. Si el espacio es de dimensión finita entonces $\blacktriangledown$ es biyectiva o sea, un isomorfismo de espacios vectoriales. El lector debe observar que *es la tercera vez* que construimos el isomorfismo entre un espacio de dimensión finita y su dual en tres lenguajes diferentes (todas son equivalentes). Primero, basado en teoremas ya demostrados para las transformaciones lineales en general. Segundo, usando las formas lineales. Por último, usando las bases duales. En lo adelante, preferiremos esta última construcción por ser más detallada que las anteriores.

7.3

Para cualesquiera dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{E}$ *se tiene que*

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{x} = \sum_{i \in N} \alpha_i \mathbf{i} \\ \mathbf{y} = \sum_{i \in N} \beta_i \mathbf{i} \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbf{x}^{\blacktriangledown}(\mathbf{y}) = \sum_{i \in N} \alpha_i \beta_i$$

Prueba. Como $\blacktriangledown$ es lineal tenemos

$$\mathbf{x}^{\blacktriangledown}(\mathbf{y}) = \sum_{i \in N} \alpha_i \mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{y}) = \sum_{i \in N} \alpha_i \mathbf{i}^{\blacktriangledown}\left(\sum_{j \in N} \beta_j \mathbf{j}\right) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \alpha_i \beta_j \mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{j}) = \sum_{i \in N} \alpha_i \beta_i$$

que es lo que se requería demostrar ■

Este resultado se puede reformular como que $\mathbf{x}^{\blacktriangledown}(\mathbf{y})$ es el producto escalar canónico de las N-adas correspondientes a $\mathbf{x}$ y a $\mathbf{y}$. En particular, como el producto escalar canónico es simétrico, siempre se tiene que $\mathbf{x}^{\blacktriangledown}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^{\blacktriangledown}(\mathbf{x})$.

7.4

Para cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathfrak{E}$ *se cumple que*

$$\mathbf{x}^{\blacktriangledown} = \sum_{i \in N} \mathbf{x}^{\blacktriangledown}(\mathbf{i})\, \mathbf{i}^{\blacktriangledown}$$

Prueba. Sabemos que la coordenada de $\mathbf{x}$ correspondiente a $\mathbf{i}$ en la base N es $\mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\blacktriangledown}(\mathbf{i})$. Como $\blacktriangledown$ es un isomorfismo, las coordenadas de $\mathbf{x}^{\blacktriangledown}$ en la base $N^{\blacktriangledown}$ son iguales a las coordenadas de $\mathbf{x}$ en la base N. ■

Ejercicio 3 Describa el espacio dual al de los polinomios $\mathbb{K}[x]$. [11]

La transformación lineal dual

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi\circ f"'] & & \mathfrak{F} \arrow[dl, "\varphi"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

Sean $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ dos espacios vectoriales y $f : \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}$ una TL. Para cada covector $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathbb{K}$ en el espacio dual $\mathfrak{F}^{\#}$ tenemos que la composición $\varphi \circ f$ es un covector en el espacio dual $\mathfrak{E}^{\#}$. Esto nos da una función $f^{\#} : \mathfrak{F}^{\#} \ni \varphi \mapsto \varphi \circ f \in \mathfrak{E}^{\#}$ que es una TL ya que $\varphi \circ (f + g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g$ y que $\varphi \circ (\alpha f) = \alpha(\varphi \circ f)$ (véase **??** en la página **??**). A la TL $f^{\#}$ se le llama la **transformación lineal dual** a f.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{E} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{F} \\ \#\Downarrow & \#\Downarrow & \Downarrow\# \\ \mathfrak{E}^{\#} & \xleftarrow[f^{\#}]{} & \mathfrak{F}^{\#} \end{array}$$

Observese en el recuadro de la derecha como la TL dual tiene la dirección de la flecha invertida. Además, es importante enfatizar que la definición de transformación lineal dual es canónica, o sea, no se necesitan ningunas bases para poder definirla.

La TL dual en coordenadas

7.5

Si A es la matriz de una TL en ciertas bases, entonces A^T es la matriz de su dual en las bases duales.

Prueba. Sea $f : \mathfrak{E} \longrightarrow \mathfrak{F}$ una TL. Sean N y M bases de $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ respectivamente. Podemos pensar que $\mathfrak{E} = \mathbb{K}^N$, $\mathfrak{F} = \mathbb{K}^M$ y que $f : \mathbb{K}^N \ni \beta_N \mapsto \alpha_{MN}\beta_N \in \mathbb{K}^M$ para cierta matriz α_{MN}. Tenemos que averiguar cual es la matriz $\gamma_{N^\blacktriangledown M^\blacktriangledown}$ de $f^\#$ en las bases duales. Por definición de la matriz de una TL la columna $\gamma_{N^\blacktriangledown j^\blacktriangledown}$ son las coordenadas de $f^\#(\mathbf{j}^\blacktriangledown)$ en la base $N^\blacktriangledown$. Por 7.4, la coordenada en $\mathbf{i}^\blacktriangledown \in N^\blacktriangledown$ de cualquier covector $\mathbf{x}^\blacktriangledown$ es igual a $\mathbf{x}^\blacktriangledown(\mathbf{i})$. Tenemos que

$$\gamma_{i^\blacktriangledown j^\blacktriangledown} = f^\#(\mathbf{j}^\blacktriangledown)(\mathbf{i}) = (\mathbf{j}^\blacktriangledown \circ f)(\mathbf{i}) = \mathbf{j}^\blacktriangledown(f(\mathbf{i})) = \mathbf{j}^\blacktriangledown(\alpha_{M\mathbf{i}}) = \alpha_{\mathbf{j}\mathbf{i}}$$

Luego, si identificamos N con $N^\blacktriangledown$ y M con $M^\blacktriangledown$ mediante las biyecciones naturales obtenemos que $\gamma_{N^\blacktriangledown M^\blacktriangledown} = \gamma_{NM} = \alpha^T_{MN}$. ■

Covariancia y contravariancia

Cuando tenemos un espacio vectorial ya coordinatizado con una base y se cambia la base, las n-adas correspondientes a los vectores cambian multiplicando por la matriz de cambio de base o sea, $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Por otro lado, las n-adas correspondientes a los covectores cambian multiplicando por la transpuesta de la matriz de cambio de base o lo que es lo mismo, multiplicando por el otro lado $\mathbf{y}' = \mathbf{y}A$. Por esto, se dice que los vectores son **contravariantes** y los covectores son **covariantes**.

Estas palabras vienen de la siguiente intuición geométrica. Si en el plano tenemos un vector y se rota el sistema de coordenadas entonces es como si el vector rotara en el sentido contrario, o sea, el vector "contravaría". Los covectores en el plano dual hacen justo lo opuesto varían como lo hace el sistema de coordenadas o sea, "covarían". Esto ocurre porque la matriz transpuesta de una rotación es igual a su inversa. Sin embargo, para otros cambios de base esto no es necesariamente cierto. Los vectores siguen "contravariando" pero los covectores no covarían. Por esto, nosotros nos ovidaremos de esta interpretación geométrica.

Propiedades de la TL dual

7.6

La dual de la identidad en $\mathfrak{E}$ es la identidad en $\mathfrak{E}^\#$.

Prueba. Si f es la identidad entonces, $\forall \varphi \in \mathfrak{G}^\#$ tenemos que $f^\#(\varphi) = \varphi \circ f = \varphi$. ■

7.7

Si $\mathfrak{E} \xrightarrow{f} \mathfrak{F} \xrightarrow{g} \mathfrak{G}$ son dos transformaciones lineales entonces, $(g \circ f)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$.

Prueba. Para cualquier $\varphi \in \mathfrak{G}^{\#}$ tenemos que
$(g \circ f)^{\#}(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = f^{\#}(\varphi \circ g) = f^{\#}\left(g^{\#}(\varphi)\right) = \left(f^{\#} \circ g^{\#}\right)(\varphi)$
que es lo que se necesitaba demostrar. ■

Otras propiedades de la TL dual se pueden encontrar en los ejercicios que siguen.

Ejercicio 4 Pruebe que una TL $f : \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}$ es inyectiva si y solo si existe otra TL $g : \mathfrak{F} \to \mathfrak{E}$ tal que $g \circ f$ es la identidad en $\mathfrak{E}$. [11]

Ejercicio 5 Pruebe que una TL $g : \mathfrak{F} \to \mathfrak{E}$ es sobreyectiva si y solo si existe otra TL $f : \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}$ tal que $g \circ f$ es la identidad en $\mathfrak{E}$. [11]

Ejercicio 6 Pruebe que si f es sobreyectiva entonces $f^{\#}$ es inyectiva. Pruebe que si f es inyectiva entonces $f^{\#}$ es sobreyectiva. [11]

Ejercicio 7 Pruebe que si f es un isomorfismo entonces $f^{\#}$ también lo es.

El doble dual

Sea $\mathfrak{E}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Definamos el **doble dual** de $\mathfrak{E}$ como el dual del dual de $\mathfrak{E}$ o sea,

$$\mathfrak{E}^{\#\#} = \left(\mathfrak{E}^{\#}\right)^{\#} = \operatorname{Mor}\left(\operatorname{Mor}\left(\mathfrak{E}, \mathbb{K}\right), \mathbb{K}\right).$$

A pesar de parecer algo muy complicado, el doble dual es simple y muy natural como se podrá ver de los siguientes argumentos.

Sea $\mathbf{x} \in \mathfrak{E}$ un vector y $f \in \mathfrak{E}^{\#}$ un covector. Sabemos que $f(\mathbf{x})$ es un escalar. De hecho, el covector f es la función

$$\mathfrak{E} \ni \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}.$$

Consideremos ahora la función

$$\dot{\mathbf{x}} : \mathfrak{E}^{\#} \ni f \longmapsto f(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}$$

que tiene como dominio a $\mathfrak{E}^{\#}$ y toma valores en el campo $\mathbb{K}$.

7.8

$\dot{\mathbf{x}}$ es una transformación lineal.

Prueba. Tenemos $\dot{\mathbf{x}}(f + g) = (f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}(f) + \dot{\mathbf{x}}(g)$ y además para $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que $\dot{\mathbf{x}}(\alpha f) = (\alpha f)(\mathbf{x}) = \alpha\left(f(\mathbf{x})\right) = \alpha\dot{\mathbf{x}}(f)$. ■

Luego $\dot{\mathbf{x}}$ es un vector del espacio doble dual $\mathfrak{E}^{\#\#}$.

7.9

La función $\mathfrak{E} \ni \mathbf{x} \longmapsto \dot{\mathbf{x}} \in \mathfrak{E}^{\#\#}$ es una trasformación lineal injectiva. Si $\mathfrak{E}$ es de dimensión finita entonces esta función es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Prueba. Sea $f \in \mathfrak{E}^{\#}$ cualquier covector. Tenemos que

$$\overbrace{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^{\bullet}(f) = f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \dot{\mathbf{x}}(f) + \dot{\mathbf{y}}(f) = (\dot{\mathbf{x}}\rho_{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{y}})(f)$$
$$\overbrace{\alpha\mathbf{x}}^{\bullet}(f) = f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) = \alpha\dot{\mathbf{x}}(f)$$

lo que demuestra que nuestra función es una trasformación lineal.

Si $\dot{\mathbf{x}} = 0 \in \mathfrak{E}^{\#\#}$ entonces para cualquier covector f tenemos que $\dot{\mathbf{x}}(f) = 0$. Supongamos que $\mathbf{x} \neq 0$, entonces existe una base A de $\mathfrak{E}$ que contiene a $\mathbf{x}$. Definamos f en la base A haciendo $f(\mathbf{x}) = 1$ y $f(\mathbf{y}) = 0\ \forall\mathbf{y} \in A\backslash\{\mathbf{x}\}$. En todo el espacio f se define por extensión lineal. Luego $\dot{\mathbf{x}}(f) = f(\mathbf{x}) = 1$ lo que contradice que $\dot{\mathbf{x}} = 0$. De aquí, necesariamente $\mathbf{x} = 0$ o sea nuestra función tiene nucleo trivial y es injectiva.

Si $\dim\mathfrak{E} < \infty$ entoces sabemos que $\dim\mathfrak{E} = \dim\mathfrak{E}^{\#} = \dim\mathfrak{E}^{\#\#}$ y todo monomorfismo entre espacios de dimensiones finitas e iguales es un isomorfismo. ■

Lo importante del resultado anterior no es que $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#\#}$ son isomorfos en el caso de dimensión finita. Esto ya lo sabíamos porque $\dim\mathfrak{E} = \dim\mathfrak{E}^{\#\#}$. Lo importante es que el isomorfismo $\mathbf{x} \longmapsto \rho_{\mathbf{x}}$ es canónico.

Ejercicio 8 Sea $f : \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}$ una TL entre espacios de dimensión finita. Demuestre que si identificamos $\mathfrak{E}$ con $\mathfrak{E}^{\#\#}$ y $\mathfrak{F}$ con $\mathfrak{F}^{\#\#}$ mediante los isomorfismos canónicos, entonces $f = f^{\#\#}$.

Anuladores

Sea $A \subseteq \mathfrak{E}$ un conjunto de vectores. Diremos que un covector *anula* a A si $f(A) = \{0\}$, o sea si $f(\mathbf{a}) = 0$ para cualquier $\mathbf{a} \in A$. Al conjunto

$$A^0 = \{f \in \mathfrak{E}^{\#} \mid f(A) = \{0\}\}$$

de todos los covectores que anulan a A se le llama el *anulador* de A.

7.10

1. A^0 *es un subespacio de* $\mathfrak{E}^{\#}$.
2. $\mathfrak{E}^0 = \{0\}$ *y* $\{0\}^0 = \mathfrak{E}^{\#}$.
3. $(A \subseteq B) \implies (A^0 \supseteq B^0)$.

Prueba. (1) Si f y g están en A^0 entonces $\forall\mathbf{a} \in A$ $f(\mathbf{a}) = 0$ y $g(\mathbf{a}) = 0$ y por lo tanto $(f+g)(\mathbf{a}) = 0$. También $\forall\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que $(\alpha f)(\mathbf{a}) = 0$.

(2) Para cualquier covector f tenemos que $f(0) = 0$ y por lo tanto $\{0\}^0 = \mathfrak{E}^{\#}$. Por definición del covector 0 tenemos que $\mathfrak{E}^0 = \{0\}$.

(3) Si $f \in B^0$ entonces f anula a todos los vectores en B y por lo tanto a todos los vectores en A. ■

7.11 *Si $\mathfrak{F}$ es un subespacio de $\mathfrak{E}$ entonces $\mathfrak{F}^0$ es canónicamente isomorfo al dual de cualquier subespacio complementario a $\mathfrak{F}$. Si $\dim \mathfrak{E} < \infty$ entonces, $\dim \mathfrak{F}^0 = \dim \mathfrak{E} - \dim \mathfrak{F}$.*

Prueba. Sea $\mathfrak{G}$ un subespacio complementario de $\mathfrak{F}$ o sea $\mathfrak{E} = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$. Sea $g \in \mathfrak{G}^\#$. Definamos $\overline{g}$ igual a g en $\mathfrak{G}$, igual a cero en $\mathfrak{F}$ y en todo el espacio por extensión lineal. En otras palabras, si $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ con $\mathbf{a} \in \mathfrak{F}$ y $\mathbf{b} \in \mathfrak{G}$, entonces $\overline{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{b})$.

Obviamente $\overline{g} \in \mathfrak{F}^0$ y la función $\mathfrak{G}^\# \ni g \longmapsto \overline{g} \in \mathfrak{F}^0$ es una TL que tiene como inversa a la restricción de $\overline{g}$ a $\mathfrak{G}$. Luego $\mathfrak{G}^\# \approx \mathfrak{F}^0$.

Si $\mathfrak{E}$ es de dimensión finita entonces $\dim \mathfrak{F}^0 = \dim \mathfrak{G}^\# = \dim \mathfrak{G} = \dim \mathfrak{E} - \dim \mathfrak{F}$. ■

7.12 *Sea $f : \mathfrak{E} \longmapsto \mathfrak{F}$ una TL. Entonces, $\ker f^\# = (\mathrm{Im}\, f)^0$.*

Prueba. Tenemos
$$\ker f^\# = \left\{g \in \mathfrak{F}^\# \mid f^\#(g) = 0\right\} = \left\{g \in \mathfrak{F}^\# \mid (g \circ f)(\mathfrak{E}) = \{0\}\right\} = \\ = \left\{g \in \mathfrak{F}^\# \mid g(\mathrm{Im}\, f) = \{0\}\right\} = (\mathrm{Im}\, f)^0$$
■

7.13 *Sea $f : \mathfrak{E} \longmapsto \mathfrak{F}$ una TL entre espacios de dimensión finita. Entonces $\dim \mathrm{Im}\, f^\# = \dim \mathrm{Im}\, f$.*

Prueba. De 7.12 y 7.11 tenemos que
$$\dim \ker f^\# + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathfrak{F}$$
Por otro lado, sabemos que el nucleo y la imagen de una TL siempre tienen dimensiones complementarias. En este caso,
$$\dim \ker f^\# + \dim \mathrm{Im}\, f^\# = \dim \mathfrak{F}^\#$$
Además, como $\mathfrak{F}$ es de dimensión finita, $\dim \mathfrak{F}^\# = \dim \mathfrak{F}$. Igualando las dos ecuaciones obtenemos lo que se requería. ■

Observese que teniendo en cuenta que la matriz de la TL dual es la transpuesta, este ultimo resultado es equivalente a que el espacio de renglones y columnas de una matriz tienen la misma dimensión.

Ejercicio 9 Sea $f : \mathfrak{E} \longmapsto \mathfrak{F}$ una TL. Pruebe que, $\mathrm{Im}\, f^\# = (\ker f)^0$. [11]

Ejercicio 10 Sea $\mathsf{f} : \mathfrak{E} \longmapsto \mathfrak{F}$ una TL entre espacios de dimensión finita. Pruebe que $\dim\ker \mathsf{f}^{\#} = \dim\ker \mathsf{f}$. **[12]**

Ejercicio 1 (Sección 7.1 página 2) En la base N tenemos $\mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{k}) = 1$. En la base M tenemos $\mathbf{i}^{\blacktriangledown}(\mathbf{k}) = 0$.

Ejercicio 3 (Sección 7.1 página 4) Para cada sucesión (infinita) $(a_0, a_1, \dots)$ con elementos en $\mathbb{K}$ hay un funcional lineal

$$\mathbb{K}[x] \ni \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha_i \in \mathbb{K}$$

y estos son todos, pues estos funcionales restringidos a la base canónica $A = \{1, x, x^2, \dots\}$ nos dan todas las funciones de A en $\mathbb{K}$. En este caso no tenemos base dual. Los funcionales

$$A^{\blacktriangledown} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto a_j \mid j \in \mathbb{N} \right\}$$

son un conjunto LI pero no generador pues con combinaciones lineales finitas solo podemos generar funciones de A en $\mathbb{K}$ de soporte finito.

Ejercicio 4 (Sección 7.1 página 6) Si existe g entonces, por el ejercicio **??**, f es injectiva. Supongamos que f es inyectiva. Entonces f se factoriza como $\mathfrak{E} \xrightarrow{f_0} \operatorname{Im} f \xrightarrow{i} \mathfrak{F}$ donde f_0 es un isomorfismo. Si $\pi : \mathfrak{F} \to \operatorname{Im} f$ es cualquier proyección entonces, $g = f_0^{-1} \circ \pi$ cumple que $g \circ f$ es la identidad en $\mathfrak{E}$.

Ejercicio 5 (Sección 7.1 página 6) Si existe f entonces, por el ejercicio **??**, g es sobreyectiva. Supongamos que g es sobreyectiva. Entonces, por el **??** la función g se factoriza como $\mathfrak{F} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{K} \xrightarrow{g_0} \mathfrak{E}$ donde $\mathfrak{K}$ es un subespacio complementario al núcleo de g, π es la proyección a $\mathfrak{K}$ a lo largo del núcleo de g y g_0 es la restricción de g a $\mathfrak{K}$. Sabemos que g_0 es un isomorfismo.
Si $i : \mathfrak{K} \to \mathfrak{F}$ es la inmersion, entonces $f = i \circ g_0^{-1}$ cumple que $g \circ f$ es la identidad en $\mathfrak{E}$.

Ejercicio 6 (Sección 7.1 página 6) Si f es sobreyectiva entonces, por el ejercicio 5 existe g tal que $g \circ f = \mathbb{I}$ y por lo tanto

$$f^{\#} \circ g^{\#} = (g \circ f)^{\#} = \mathbb{I}^{\#} = \mathbb{I}.$$

Aplicando el ejercicio 4 obtenemos que $f^{\#}$ es inyectiva. La prueba de la otra afirmación es análoga.

Ejercicio 9 (Sección 7.1 página 8) Sea $g \in \operatorname{Im} f^{\#} \subseteq \mathfrak{E}^{\#}$ entonces $\exists h \in \mathfrak{F}^{\#}$ tal que $h \circ f = f^{\#}(h) = g$. Si $\mathbf{x} \in \ker f$ entonces, $g(\mathbf{x}) = (h \circ f)(\mathbf{x}) = h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y por lo tanto $g \in (\ker f)^0$. Luego $\operatorname{Im} f^{\#} \subseteq (\ker f)^0$.Recíprocamente, sea $g \in (\ker f)^0 \subseteq \mathfrak{E}^{\#}$

entonces $\forall \mathbf{x} \in \ker f$ tenemos que $g(\mathbf{x}) = 0$. Sea $\mathfrak{G}$ un subespacio complementario al $\ker f$ y B una base de $\mathfrak{G}$. El conjunto $f(B) \subseteq \mathfrak{F}$ es LI y por lo tanto está contenido en una base A de $\mathfrak{F}$. Para $\mathbf{i} \in B$ definamos $h(f(\mathbf{i})) = g(\mathbf{i})$ y para $\mathbf{a} \in A \setminus f(B)$ definamos $h(\mathbf{a})$ con un valor arbitrario del campo. La función h está definida en la base A de $\mathfrak{F}$ y por extensión lineal la convertimos en un covector en $\mathfrak{F}^{\#}$.Ahora, si $\mathbf{y} \in \mathfrak{E}$ entonces $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$ con $\mathbf{x}$ en $\ker f$ y $\mathbf{z}$ en $\mathfrak{G}$. Además $\mathbf{z}$ es una combinación lineal de B. Luego

$$g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{i} \in B} \alpha_{\mathbf{i}} g(\mathbf{i}) = h(f(\mathbf{x})) + \sum_{\mathbf{i} \in B} \alpha_{\mathbf{i}} h(f(\mathbf{i})) = h(f(\mathbf{x})) + h(f(\mathbf{z})) = h(f(\mathbf{y}))$$

y por lo tanto $g = h \circ f = f^{\#}(h)$ lo que prueba que $g \in \operatorname{Im} f^{\#}$.

Ejercicio 10 (Sección 7.1 página 9) De 7.12 y del ejercicio 9 tenemos que

$$\dim \operatorname{Im} f^{\#} + \dim \ker f = \dim \mathfrak{E}$$

Por otro lado, sabemos que el nucleo y la imagen de una TL siempre tienen dimensiones complementarias. En este caso,

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathfrak{E}$$

Igualando las dos ecuaciones obtenemos lo que se requería.

Glosario de conceptos

Covector. Vector en el espacio dual. Sinónimo de funcional lineal. **1**

Funcional lineal. TL del espacio en el campo. **1**

Guía
de estudio

1. Definición de funcional lineal
2. Definicición del espacio dual
3. Explique la diferencia entre los funcional lineales y las formas lineales
4. Definición de la base dual.
5. El conjunto de covectores de la base dual es linealmente independiente.
6. Si el espacio es de dimensión finita entonces, la base dual es un conjunto generador.
7. Definición de Transformación Lineal Dual
8. Si A es la matriz de una TL en ciertas bases, entonces A^{T} es la matriz de su dual en las bases duales.
9. La dual de la identidad en $\mathfrak{E}$ es la identidad en $\mathfrak{E}^{\#}$.
10. Si $\mathfrak{E} \xrightarrow{f} \mathfrak{F} \xrightarrow{g} \mathfrak{G}$ son dos transformaciones lineales entonces, $(g \circ f)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$.
11. La función $\mathfrak{E} \ni x \longmapsto \dot{x} \in \mathfrak{E}^{\#\#}$ es una trasformación lineal injectiva. Si $\mathfrak{E}$ es de dimensión finita entonces esta función es un isomorfismo de espacios vectoriales.
12. Pruebe que: 1.- A^{0} es un subespacio de $\mathfrak{E}^{\#}$. 2.- $\mathfrak{E}^{0} = \{0\}$ y $\{0\}^{0} = \mathfrak{E}^{\#}$. 3.- $(A \subseteq B) \implies \left(A^{0} \supseteq B^{0}\right)$.
13. Si $\mathfrak{F}$ es un subespacio de $\mathfrak{E}$ entonces $\mathfrak{F}^{0}$ es canónicamente isomorfo al dual de cualquier subespacio complementario a $\mathfrak{F}$. Si $\dim \mathfrak{E} < \infty$ entonces, $\dim \mathfrak{F}^{0} = \dim \mathfrak{E} - \dim \mathfrak{F}$.
14. $\ker f^{\#} = (\operatorname{Im} f)^{0}$
15. $\dim \operatorname{Im} f^{\#} = \dim \operatorname{Im} f$.