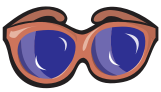
7.2 Funcionales bilineales

Sean $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. A un funcional $f : \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F} \to \mathbb{K}$ se le llama **bilineal** si se cumplen las dos siguientes propiedades

- $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{E}$ el funcional $\mathfrak{F} \ni \mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{K}$ es lineal
- $\forall \mathbf{y} \in \mathfrak{F}$ el funcional $\mathfrak{E} \ni \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{K}$ es lineal

o en otras palabras un funcional bilineal es un funcional de dos variables que es lineal en cada variable. Es claro que la suma de funcionales bilineales es también un funcional bilineal. Lo mismo ocurre con el producto por escalares. Luego, el conjunto de funcionales bilineales $\mathrm{Bil}(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ es un espacio vectorial.



Los funcionales bilineales están en el mismo corazón de muchas ramas de las matemáticas: teoría de números, grupos de Lie, análisis funcional, etc. También de la física: relatividad especial, teoría cuántica, etc.

La notación

Hay muchas funciones, funcionales, covectores, transformaciones lineales, etc. relacionadas con los funcionales bilineales por esto es importante escoger una buena notación, especial para los mismos. La primera observación que debemos hacer, es que el producto escalar canónico en $\mathbb{K}^n$ definido por

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

es un funcional bilineal.

Por esto podemos pensar que un funcional bilineal es una especie de producto que a dos vectores (sean del mismo espacio o no) le hace corresponder un elemento del campo, o sea un escalar. Por esto, usaremos una notación operacional que recuerde un producto para denotar a los funcionales bilineales pero siempre entre comillas angulares. Asi por ejemplo un funcional bilineal será una función

$$\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle : \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F} \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle \in \mathbb{K}$$

que cumple que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathfrak{E}$, $\forall \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathfrak{F}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$\begin{array}{r|l|l} 1. & \langle\!\langle \mathbf{x} + \mathbf{x}' \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathbf{x}' \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle & \langle\!\langle \alpha\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \alpha \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle \\ 2. & \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} + \mathbf{y}' \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}' \rangle\!\rangle & \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\alpha \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle \alpha \end{array}$$

y así convertimos las propiedades de linearidad 1 y 2 en una especie de propiedades distributivas a la derecha e izquierda y asociativas a la derecha e izquierda de nuestro "producto".

Observese que las propiedades 1 son equivalentes a que $\forall \mathbf{y} \in \mathfrak{F}$ la función

$$\langle\!\langle \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle : \mathfrak{E} \ni \mathbf{x} \mapsto \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle \in \mathbb{K}$$

es un funcional lineal, o sea los $\langle\!\langle \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle$ son covectores en el espacio dual $\mathfrak{E}^\#$. De la misma manera las propiedades 2 son equivalentes a que $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{E}$ la función

$$\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \rangle\!\rangle : \mathfrak{F} \ni \mathbf{y} \mapsto \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle \in \mathbb{K}$$

es un funcional lineal, o sea los $\langle\!\langle \mathbf{x}\bullet\rangle\!\rangle$ son covectores en el espacio dual $\mathfrak{F}^{\#}$.

Hagamos un resumen de nuestra notación

$\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle \in \operatorname{Bil}(\mathfrak{E},\mathfrak{F})$	$\langle\!\langle \mathbf{x}\bullet\rangle\!\rangle \in \mathfrak{F}^{\#}$
$\langle\!\langle \mathbf{x}\bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle \in \mathbb{K}$	$\langle\!\langle \bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle \in \mathfrak{E}^{\#}$

Esta notación se debe pensar de la siguiente manera. Los $\langle\!\langle \mathbf{x}\bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle$ son escalares. Si fijamos a $\mathbf{x}$ y variamos $\mathbf{y}$ entonces, obtenemos el covector $\langle\!\langle \mathbf{x}\bullet\rangle\!\rangle$. Si fijamos a $\mathbf{y}$ y variamos $\mathbf{x}$ entonces, obtenemos el covector $\langle\!\langle \bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle$. Si variamos a $\mathbf{x}$ y a $\mathbf{y}$ entonces, obtenemos el funcional bilineal $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$.

Los funcionales bilineales en coordenadas

Sea M y N bases de $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ respectivamente. Si $\mathbf{x} \in \mathfrak{E}$ y $\mathbf{y} \in \mathfrak{F}$ entonces existen combinaciones lineales finitas

$$\mathbf{x} = \sum_{i\in M} x_i \mathbf{i} \quad \mathbf{y} = \sum_{j\in N} y_j \mathbf{j}$$

donde los x_i y los y_j son ciertos escalares. Aplicando las propiedades de linearidad obtenemos

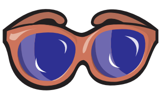
$$\langle\!\langle \mathbf{x}\bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \sum_{i\in M} x_i \mathbf{i} \bullet \sum_{j\in N} y_j \mathbf{j}\rangle\!\rangle = \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} x_i y_j \langle\!\langle \mathbf{i}\bullet\mathbf{j}\rangle\!\rangle$$

y si denotamos por α_{ij} al escalar $\langle\!\langle \mathbf{i}\bullet\mathbf{j}\rangle\!\rangle$ obtenemos

$$\langle\!\langle \mathbf{x}\bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle = \sum_{i\in N}\sum_{j\in M} x_i y_j \alpha_{ij}$$

o sea, una forma bilineal. Los escalares α_{ij} forman una matriz α_{MN} llamada **matriz del funcional bilineal** en las bases M y N.

Esto funciona incluso para los espacios de dimensión infinita pues para cada pareja de vectores $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ solo un número finito de los productos $x_i y_j$ son diferentes de cero. Por esto, a la matriz α_{MN} no hay que pedirle que tenga columnas o renglones de soporte finito. En esencia esto quiere decir que en el caso de dimensión infinita $\dim \operatorname{Mor}(\mathfrak{E},\mathfrak{F}) < \dim \operatorname{Bil}(\mathfrak{E},\mathfrak{F})$.



Debido al amplio uso de los funcionales bilineales muchas y muy variadas personas escriben de los funcionales bilineales, usan muchas diferentes notaciones e incluso usan diferentes terminologías. Probablemente el ejemplo más notable de esto es que los matemáticos más clásicos que escriben en inglés (no así en otros idiomas) abusan del lenguaje confundiendo el concepto de "forma bilineal" con el de "funcional bilineal". En realidad los funcionales bilineales se convierten en formas bilineales solamente despues de escoger bases en los espacios.

Las TLs acompañantes

Observemos que para cada vector $\mathbf{x} \in \mathfrak{E}$ tenemos que $\langle\!\langle \mathbf{x}\bullet\rangle\!\rangle$ es un covector en $\mathfrak{F}^{\#}$. De la misma manera para cada vector $\mathbf{y} \in \mathfrak{F}$ tenemos que $\langle\!\langle \mathbf{y}\bullet\rangle\!\rangle$ es un covector en $\mathfrak{E}^{\#}$. Esto nos da dos funciones:

$$\langle\!\langle - \bullet \rangle\!\rangle : \mathfrak{E} \ni \mathbf{x} \mapsto \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \rangle\!\rangle \in \mathfrak{F}^{\#}$$
$$\langle\!\langle \bullet - \rangle\!\rangle : \mathfrak{F} \ni \mathbf{y} \mapsto \langle\!\langle \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle \in \mathfrak{E}^{\#}$$

Veremos que las funciones $\langle\!\langle - \bullet \rangle\!\rangle$ y $\langle\!\langle \bullet - \rangle\!\rangle$ son TLs y las llamaremos **transformaciones lineales acompañantes** izquierda y derecha del funcional bilineal $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$.

7.1 *Las funciones $\langle\!\langle - \bullet \rangle\!\rangle$ y $\langle\!\langle \bullet - \rangle\!\rangle$ son transformaciones lineales.*

Prueba. Por simetría de la definición de funcional bilineal solo hay que probar una de las dos afirmaciones. Probemos la primera. Debemos comprobar que $\langle\!\langle \mathbf{x} + \mathbf{x}' \bullet \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathbf{x}' \bullet \rangle\!\rangle$ y esto es trivial ya que $\forall \mathbf{y}$ tenemos que $\langle\!\langle \mathbf{x} + \mathbf{x}' \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathbf{x}' \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle$. De la misma manera vemos que $\langle\!\langle \alpha \mathbf{x} \bullet \rangle\!\rangle = \alpha \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \rangle\!\rangle$. ■

La importancia de las TLs acompañantes es que cualquiera de las dos define al funcional bilineal.

7.2 *Si $\mathsf{f} : \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}^{\#}$ es una TL entonces, $\mathsf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{y})$ es un funcional bilineal.*

Prueba. Es lineal en la primera variable porque f es lineal. Es lineal en la segunda variable porque $\mathsf{f}(\mathbf{x})$ es un covector. ■

Estos resultados nos dan funciones

$$\mathrm{Bil}(\mathfrak{E}, \mathfrak{F}) \ni \langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle \longmapsto \langle\!\langle - \bullet \rangle\!\rangle \in \mathrm{Mor}\left(\mathfrak{E}, \mathfrak{F}^{\#}\right)$$
$$\mathrm{Mor}\left(\mathfrak{E}, \mathfrak{F}^{\#}\right) \ni \mathsf{f} \longmapsto \mathsf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{y}) \in \mathrm{Bil}(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$$

y queremos convencernos de que estas funciones son la inversa una de la otra.

7.3 *La TL acompañante izquierda de $\mathsf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{y})$ es f.*

Prueba. Sea $\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{y})$. Tenemos $\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \rangle\!\rangle = \mathsf{f}(\mathbf{x})$ luego, $\langle\!\langle - \bullet \rangle\!\rangle = \mathsf{f}$. ■

7.4 *Si $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ es un funcional bilineal y $\mathsf{f} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\!\langle - \bullet \rangle\!\rangle$ entonces, $\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \mathsf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{y})$.*

Prueba. Tenemos $\mathsf{f}(\mathbf{x}) = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \rangle\!\rangle$ luego, $\mathsf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{y}) = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle$. ■

Luego, la función que a cada funcional bilineal le hace corresponder su TL acompañante izquierda es biyectiva. Mas aún, esta correspondencia es un isomorfismo canónico entre los espacios vectoriales $\mathrm{Bil}(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ y $\mathrm{Mor}\left(\mathfrak{E}, \mathfrak{F}^{\#}\right)$. Como esto último no lo usaremos, dejaremos su prueba en calidad de ejercicio.

Ejercicio 1 Pruebe que la función $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle \longmapsto \langle\!\langle - \bullet \rangle\!\rangle$ es una TL. [7]

Núcleos de los funcionales bilineales

Sea $\langle\langle\bullet\rangle\rangle : \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F} \to \mathbb{K}$ un funcional bilineal. A los conjuntos

$$\ker \langle\langle - \bullet\rangle\rangle = \left\{\mathbf{x} \in \mathfrak{E} \mid \langle\langle \mathbf{x}\bullet\rangle\rangle = 0 \in \mathfrak{F}^{\#}\right\} = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{E} \mid \langle\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathfrak{F}\}$$
$$\ker \langle\langle \bullet - \rangle\rangle = \left\{\mathbf{y} \in \mathfrak{F} \mid \langle\langle \bullet\mathbf{y}\rangle\rangle = 0 \in \mathfrak{E}^{\#}\right\} = \{\mathbf{y} \in \mathfrak{F} \mid \langle\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{E}\}$$

se les llama **núcleo izquierdo** y **núcleo derecho** del funcional bilineal $\langle\langle\bullet\rangle\rangle$. En otras palabras, el nucleo izquierdo es el nucleo de la TL acompañante izquierda y similarmente para el nucleo derecho.

Un funcional bilineal $\langle\langle\bullet\rangle\rangle$ se le llama **no singular** o **no degenerado** si sus dos núcleos son triviales. esto es equivalente a que *las dos* trasformaciones lineales acompañantes sean inyectivas.

Hay una manera bastante facil de deshacernos de los núcleos de un funcional bilineal. Denotemos por $\mathsf{E}_0 \subseteq \mathfrak{E}$ al núcleo izquierdo de $\langle\langle\bullet\rangle\rangle$ y por $\mathsf{E}_1 \subseteq \mathfrak{E}$ a cualquier subespacio complementario a E_0. Denotemos por $\mathsf{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}$ al núcleo derecho de $\langle\langle\bullet\rangle\rangle$ y por $\mathsf{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$ a cualquier subespacio complementario a F_0.

7.5 *La restricción de $\langle\langle\bullet\rangle\rangle$ a $\mathsf{E}_1 \oplus \mathsf{F}_1$ es no singular.*

Prueba. Sea $\mathsf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathsf{E}_1 \mid \langle\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathsf{F}_1\}$ el núcleo izquierdo de la restricción de $\langle\langle\bullet\rangle\rangle$ a $\mathsf{E} \times \mathsf{F}$. Si $\mathbf{y}$ es un vector cualquiera en $\mathfrak{F}$ entonces, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1$ con $\mathbf{y}_0 \in \mathsf{F}_0$ y $\mathbf{y}_1 \in \mathsf{F}_1$. Si además, $\mathbf{x} \in \mathsf{A} \subseteq \mathsf{E}_1$ entonces,

$$\langle\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}_0\rangle\rangle + \langle\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}_1\rangle\rangle = 0 + 0$$

y por lo tanto $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{E}_0$. Luego $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{E}_0 \cap \mathsf{E}_1 = \{0\}$ y esto significa que A es trivial. La prueba de que el núcleo derecho es trivial es análoga. ■

Observese que el funcional bilineal $\langle\langle\bullet\rangle\rangle$ está determinado a priori por su restricción a $\mathsf{E}_1 \oplus \mathsf{F}_1$ ya que si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F}$ entonces $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1)$ con $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathsf{E}_0 \oplus \mathsf{F}_0$ y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \in \mathsf{E}_1 \oplus \mathsf{F}_1$. De aquí

$$\langle\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{x}_0 \bullet \mathbf{y}_0\rangle\rangle + \langle\langle \mathbf{x}_0 \bullet \mathbf{y}_1\rangle\rangle + \langle\langle \mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{y}_0\rangle\rangle + \langle\langle \mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{y}_1\rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{y}_1\rangle\rangle$$

ya que todos los demás sumandos son cero.

Núcleos de los funcionales bilineales en dimensión finita

7.6 *Si $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ son finito dimensionales y $\langle\langle\bullet\rangle\rangle$ es no singular entonces, $\dim \mathfrak{E} = \dim \mathfrak{F}$.*

Prueba. Como $\langle\langle\bullet\rangle\rangle$ es no singular las TLs acompañantes son inyectivas por lo que $\dim \mathfrak{E} \leq \dim \mathfrak{F}^{\#}$ y $\dim \mathfrak{F} \leq \dim \mathfrak{E}^{\#}$. Como los espacios son finito dimensionales $\dim \mathfrak{E} = \dim \mathfrak{E}^{\#}$ y $\dim \mathfrak{F} = \dim \mathfrak{F}^{\#}$. De las desigualdades obtenemos la prueba. ■

7.7 *Si $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ son de la misma dimensión finita entonces, los núcleos derecho e izquierdo de $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ tienen la misma dimensión.*

Prueba. Sean E_1 y F_1 subespacios complementarios a los núcleos derecho e izquierdo de $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$. Por 7.5 la restrición de $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ a $\mathsf{E}_1 \oplus \mathsf{F}_1$ es no singular. Por 7.6 $\dim \mathsf{E}_1 = \dim \mathsf{F}_1$. Como por hipótesis $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ tienen la misma dimensión, entonces los núcleos tienen la misma dimensión. ■

El siguiente resultado es una consecuencia directa del anterior.

7.8 *Si $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ son de la misma dimensión finita entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ es no singular,*
2. *el núcleo derecho de $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ es trivial,*
3. *el núcleo izquierdo de $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ es trivial.*

Dualidad de las TL acompañantes

Veamos ahora una primera aplicación del isomorfismo canónico entre un espacio y su doble dual. Para esto sean $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ dos espacios de dimensión finita. Sea $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle : \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F} \to \mathbb{K}$ un funcional bilineal cualquiera. Recordemos que $\mathfrak{F}$ es isomorfo a $\mathfrak{F}^{\#\#}$ mediante el isomorfismo canónico $\mathfrak{F} \ni \mathbf{y} \longmapsto \dot{\mathbf{y}} \in \mathfrak{F}^{\#\#}$ y que $\dot{\mathbf{y}}$ se define como el funcional lineal $\mathfrak{F}^{\#} \ni z \longmapsto z(\mathbf{y}) \in \mathbb{K}$ o sea, $\dot{\mathbf{y}}$ es la evaluación en $\mathbf{y}$.

7.9 *Las TLs acompañantes son duales una de la otra.*

Prueba. Probemos que $\mathsf{h} \stackrel{\text{def}}{=} (\langle\!\langle - \bullet\rangle\!\rangle)^{\#}$ es igual a $\langle\!\langle\bullet - \rangle\!\rangle$. Tenemos $\mathsf{h} : \mathfrak{F}^{\#\#} \to \mathfrak{E}^{\#}$ y como $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{\#\#}$ los dominios y codominios de h y $\langle\!\langle\bullet - \rangle\!\rangle$ coinciden. Sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F}$. Como estamos identificando $\mathfrak{F}$ con $\mathfrak{F}^{\#\#}$ mediante el isomorfismo canónico tenemos que $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{y}}$ es también un elemento de $\mathfrak{F}^{\#\#}$. Por la definición de TL dual tenemos que

$$\mathsf{h}(\dot{\mathbf{y}})(\mathbf{x}) = (\dot{\mathbf{y}} \circ \langle\!\langle - \bullet\rangle\!\rangle)(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{y}}(\langle\!\langle - \bullet\rangle\!\rangle(\mathbf{x})) =$$
$$= \dot{\mathbf{y}}(\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet\rangle\!\rangle) = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet\rangle\!\rangle(\mathbf{y}) = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\bullet - \rangle\!\rangle(\mathbf{y})(\mathbf{x})$$

y por lo tanto $\mathsf{h} = \langle\!\langle\bullet - \rangle\!\rangle$. La prueba de que $(\langle\!\langle\bullet - \rangle\!\rangle)^{\#} = \langle\!\langle - \bullet\rangle\!\rangle$ es análoga. ■

Tanto la afirmación 7.9 como su prueba son un poco informales. De hecho, lo que se prueba es que si $\phi : \mathfrak{F} \ni \mathbf{y} \longmapsto \dot{\mathbf{y}} \in \mathfrak{F}^{\#\#}$ es la inyección canónica entonces $\langle\!\langle\bullet - \rangle\!\rangle = (\langle\!\langle - \bullet\rangle\!\rangle)^{\#} \circ \phi$. En el caso de que $\mathfrak{F}$ sea de dimensión finita entonces ϕ es un isomorfismo canónico y podemos "pensar" que es la identidad.

Los isomorfismos entre $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#}$

Si $\mathfrak{E}$ es de dimensión infinita entonces, no hay isomorfismos entre $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#}$ ya que $\dim \mathfrak{E} < \dim \mathfrak{E}^{\#}$. Si $\mathfrak{E}$ es de dimensión finita entonces, $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#}$ tienen la misma dimensión y por lo tanto son isomorfos. Ahora, queremos ver que escoger un isomorfismo entre $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#}$ es equivalente a escoger un funcional bilineal no singular en $\mathrm{Bil}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$.

7.10

La correspondencia que a cada funcional bilineal no singular $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ le hace corresponder el isomorfismo $\langle\!\langle - \bullet \rangle\!\rangle$ entre $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#}$ es biunívoca.

Prueba. Sea $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle \in \mathrm{Bil}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ un funcional bilineal no singular. La TL acompañante izquierda $\langle\!\langle - \bullet \rangle\!\rangle$ es inyectiva y como $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#}$ tienen la misma dimensión finita entonces, $\langle\!\langle - \bullet \rangle\!\rangle$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#}$.

Recíprocamente, sea $f : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}^{\#}$ un isomorfismo. Entonces, de 7.2 obtenemos que $\langle\!\langle x \bullet y \rangle\!\rangle \overset{\text{def}}{=} f(x)(y)$ es un funcional bilineal. De 7.3 sabemos que $\langle\!\langle - \bullet \rangle\!\rangle = f$. Como f es un isomorfismo entonces, el núcleo izquierdo es trivial. Usando 7.8 obtenemos que $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ es no singular. ■

Al escoger una base en un espacio finito-dimensional este se convierte en un espacio de n-adas en el cual tenemos producto escalar canónico que es un funcional bilineal. O sea, escoger una base es mucho más que escoger un funcional bilineal. El resultado anterior nos dice que para escoger un isomorfismo entre $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#}$ es necesario y suficiente escoger un funcional bilineal.

Lo anterior es importante porque cuando se tiene un funcional bilineal entonces este está definido en cualquier subespacio del espacio (mediante la restricción). Aunque no se tenga una base del subespacio, si se tiene el isomorfismo del subespacio con su dual.

Ejercicio 2 Demuestre que la TL izquierda del producto escalar canónico en $\mathbb{K}^n$ es el isomorfismo entre $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\#}$ definido por la base dual a la canónica.

Ejercicio 1 (Sección 7.2 página 3) Sean $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ y $\langle\!\langle\star\rangle\!\rangle$ dos funcionales bilineales. Su suma está definida como

$$\langle\!\langle \mathbf{x}\,(\bullet+\star)\,\mathbf{y}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x}\bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathbf{x}\star\mathbf{y}\rangle\!\rangle.$$

Luego, tenemos la igualdad de covectores

$$\langle\!\langle \mathbf{x}\,(\bullet+\star)\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x}\bullet\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathbf{x}\star\rangle\!\rangle$$

y de aquí la igualdad de TLs

$$\langle\!\langle -\,(\bullet+\star)\rangle\!\rangle = \langle\!\langle -\bullet\rangle\!\rangle + \langle\!\langle -\star\rangle\!\rangle.$$

Observese que el único argumento que se usa para pasar de una igualdad a la siguiente es la definición de cuando dos funciones son iguales.

De la misma manera se comprueba que $\langle\!\langle -\,(\alpha\bullet)\rangle\!\rangle = \alpha\langle\!\langle -\bullet\rangle\!\rangle$.

Guía
de estudio

1. Definición de funcional bilineal
2. Cual es la matriz de un funcional bilineal.
3. ¿Que es la función $\ll - \bullet \gg$?
4. Si $\mathsf{f} : \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}^{\#}$ es una TL entonces, $\mathsf{f}(\mathfrak{x})(\mathfrak{y})$ es un funcional bilineal.
5. La TL acompañante izquierda de $\mathsf{f}(\mathfrak{x})(\mathfrak{y})$ es f.
6. Si $\ll \bullet \gg$ es un funcional bilineal y $\mathsf{f} \stackrel{\text{def}}{=} \ll - \bullet \gg$ entonces, $\ll \mathfrak{x} \bullet \mathfrak{y} \gg = \mathsf{f}(\mathfrak{x})(\mathfrak{y})$.
7. Defina los núcleos de los funcionales bilineales. Que es un funcional bilineal no degenerado.
8. Si $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ son finito dimensionales y $\ll \bullet \gg$ es no singular entonces, $\dim \mathfrak{E} = \dim \mathfrak{F}$.
9. Si $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ son de la misma dimensión finita entonces, los núcleos derecho e izquierdo de $\ll \bullet \gg$ tienen la misma dimensión.
10. Demuestre que los funcionales bilineales no singulares están en correspondencia biunívoca con los isomorfismos entre un espacio y su dual.