7.3 Productos escalares

Sea E un espacio vectorial. Un **producto escalar** en $\mathfrak{E}$ es un funcional bilineal $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle \in \mathrm{Bil}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ tal que se cumplen los dos siguientes axiomas:

1) $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ es no singular
2) $\forall x, y \in \mathfrak{E}\ (\langle\!\langle x \bullet y \rangle\!\rangle = 0) \Leftrightarrow (\langle\!\langle y \bullet x \rangle\!\rangle = 0)$

El primer axioma no es muy importante. Del segundo axioma es claro que los nucleos derecho e izquierdo del funcional bilineal coinciden. Luego, si el funcional fuera singular, entonces bastaría restringirlo a un subespacio complementario al nucleo para obtener la no singularidad. Nosotros exigiremos la no singularidad para seguir la tradición y no ensuciar con trivialidades lo que sigue.

Ejercicio 1 Pruebe que el producto escalar canónico en $\mathbb{K}^n$ es un producto escalar.

Frecuentemente pensaremos que $\mathfrak{E}$ trae consigo un producto escalar $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$. Por esto le llamaremos a $\mathfrak{E}$ **espacio con producto escalar**.

Alternancia y simetría

Se dice que un vector x es **isotrópico** si $\langle\!\langle x \bullet x \rangle\!\rangle = 0$. A los vectores que no son isotrópicos se les llama **anisotrópicos**.

El espacio $\mathbb{C}^2$ con el producto escalar canónico tiene vectores isotrópicos no nulos ($x = (i, 1)$). El espacio de Minkowsky es $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar definido por la forma bilineal

$$xx' + yy' + zz' - c^2tt'$$

donde c es la velocidad de la luz. El espacio de Mikowsky es el espacio donde "vive" la teoría de la relatividad. Los vectores isotrópicos en este espacio forman un cono $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ llamado çono de luz".

Si para un producto escalar se cumple que todo vector es isotrópico entonces se dice que este es **alternante**.

A $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar definido por la forma bilineal $xy' - yx'$se le llama **plano simpléctico real**. Este plano es alternante.

A un producto escalar se le llama **simétrico** si para cualesquiera vectores x , y se cumple que $\langle\!\langle x \bullet y \rangle\!\rangle = \langle\!\langle y \bullet x \rangle\!\rangle$. Por otro lado, si para cualesquiera vectores x , y se cumple que $\langle\!\langle x \bullet y \rangle\!\rangle = -\langle\!\langle y \bullet x \rangle\!\rangle$ entonces se le llama **antisimétrico**.

7.1 *Todo producto escalar alternante es antisimétrico.*

Prueba. Para cualesquiera vectores x , y tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\!\langle x + y \bullet x + y \rangle\!\rangle = \langle\!\langle x \bullet x \rangle\!\rangle + \langle\!\langle y \bullet y \rangle\!\rangle + \langle\!\langle x \bullet y \rangle\!\rangle + \langle\!\langle y \bullet x \rangle\!\rangle = \\ &= \langle\!\langle x \bullet y \rangle\!\rangle + \langle\!\langle y \bullet x \rangle\!\rangle \end{aligned}$$

■

El siguiente hecho muy importante para nuestra exposición, tiene una demostración ingeniosa pero que no aporta nada substancial al estudio de los productos escalares. Por esto, pospondremos para más adelante esta prueba para no perturbar el hilo de la exposición.

7.2 *Todo producto escalar es simétrico o es alternante.*

Perpendicularidad

Sea $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ un producto escalar en $\mathfrak{E}$. Diremos que dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ son **perpendiculares** y lo denotaremos por $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ si se cumple que $\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = 0$. En este lenguaje, el segundo axioma se traduce como $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) \Leftrightarrow (\mathbf{y} \perp \mathbf{x})$. O sea, que la *relación de perpendicularidad es simétrica.*

El uso de la palabra "perpendicularidad" para esta relación proviene del caso particular del producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo las propiedades de la perpendicularidad de otros productos escalares pueden ser muy diferentes a las del producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$.

Ampliaremos esta notación a los conjuntos de vectores. Diremos que A es **perpendicular** a B y escribiremos $A \perp B$ si cualquier vector en A es perpendicular a cualquier vector en B.

7.3 *El conjunto de vectores* $A^\perp \stackrel{def}{=} \{\mathbf{x} \in \mathfrak{E} \mid \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in A\}$ *es un subespacio.*

Prueba. Si $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in A^\perp$ y $\alpha \in K$ entonces

$$\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} + \mathbf{y}' \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}' \rangle\!\rangle = 0$$
$$\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \alpha\mathbf{y} \rangle\!\rangle = \alpha \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = 0$$

y esto prueba la afirmación. ■

Al subespacio $A^\perp$ se lo llamaremos **subespacio perpendicular** al conjunto de vectores A. Obsérvese que $A^\perp$ es el conjunto de vectores B más grande tal que $A \perp B$.

7.4

1. $\mathfrak{E}^\perp = \{0\}$ *y* $\{0\}^\perp = \mathfrak{E}^\#$.
2. $(A \subseteq B) \implies (A^\perp \supseteq B^\perp)$.
3. $A^\perp = \langle A \rangle^\perp$
4. $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

Prueba. (1) Si $\mathbf{x} \in \mathfrak{E}^\perp$ entonces $\mathbf{x}$ está en el nucleo de $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ y por definición de producto escalar $\mathbf{x} = 0$. Por otro lado todo vector es perpendicular a $\{0\}$.

(2) Si $\mathbf{x} \in \mathsf{B}^{\perp}$ entonces es perpendicular a todos lo vectores en B y por lo tanto es perpendicular a todos los vectores en A.

(3) Por 2, $\mathsf{A} \subseteq \langle \mathsf{A} \rangle \implies \mathsf{A}^{\perp} \supseteq \langle \mathsf{A} \rangle^{\perp}$. Por otro lado si $\mathbf{x} \in \mathsf{A}^{\perp}$ y $\mathbf{y} \in \langle \mathsf{A} \rangle$ entonces

$$\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \sum_{i \in \mathsf{A}} \alpha_i \mathbf{i} \rangle\!\rangle = \sum_{i \in \mathsf{A}} \alpha_i \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{i} \rangle\!\rangle = 0$$

lo que demuestra que $\mathbf{x} \in \langle \mathsf{A} \rangle^{\perp}$.

(4) Obviamente $\mathsf{A} \perp \mathsf{A}^{\perp}$ y por lo tanto $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{A}^{\perp\perp}$. ■

El resultado anterior es todo lo que podremos decir de las propiedades del subespacio perpendicular. Sin embargo, si $\mathfrak{E}$ es de dimensión finita, entonces hay propiedades más profundas. Para esto necesitaremos un resultado auxiliar.

7.5 *Si $\mathfrak{E}$ es de dimension finita, $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ es un conjunto de vectores LI y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ es un conjunto de escalares entonces existe un vector $\mathbf{y}$ tal que $\forall i$ $\langle\!\langle \mathbf{x}_i \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \alpha_i$.*

Prueba. El elemento clave de la prueba es que como el producto escalar es no degenerado y $\mathfrak{E}$ es de dimension finita entonces, la transformación lineal acompañante

$$\langle\!\langle \bullet - \rangle\!\rangle : \mathfrak{E} \ni \mathbf{y} \longmapsto \langle\!\langle \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle \in \mathfrak{E}^{\#}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales y por lo tanto es sobreyectiva.

Sea $f \in \mathfrak{E}^{\#}$ definida por $f(\mathbf{x}_i) = \alpha_i$ y en todo el espacio por extensión lineal. Por la sobreyectividad de $\langle\!\langle \bullet - \rangle\!\rangle$ tiene que existir un vector $\mathbf{y}$ tal que $f = \langle\!\langle \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle$ y ese vector cumple lo que se requiere. ■

Ahora podremos hacer más fuerte el inciso 2 de 7.4. Recalquemos que el símbolo $\subset$ significa "subconjunto propio".

7.6 *Sean $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ subespacios de $\mathfrak{E}$ que es de dimensión finita. Si $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ entonces, $\left(\mathfrak{F}^{\perp} \supset \mathfrak{G}^{\perp}\right)$.*

Prueba. Por 7.4.2 solo tenemos que probar que $\mathfrak{F}^{\perp} \neq \mathfrak{G}^{\perp}$. Sea una A una base de $\mathfrak{F}$ y B una base de $\mathfrak{G}$ tal que $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{B}$. Como $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$ entonces $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$. Sea $\mathbf{b} \in \mathsf{B} \backslash \mathsf{A}$. Por 7.6 existe un vector $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{y} \perp \mathsf{A}$ y $\langle\!\langle \mathbf{b} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = 1$. Luego, $\mathbf{y} \in \mathsf{A}^{\perp}$ y $\mathbf{y} \notin \mathsf{B}^{\perp}$. Usando 7.4.3 obtenemos que $\mathbf{y} \in \mathfrak{F}$ pero $\mathbf{y} \notin \mathfrak{G}$. ■

7.7 *Si $\mathfrak{E}$ es de dimension finita y $\mathfrak{F}$ es un subespacio de $\mathfrak{E}$ entonces, $\dim \mathfrak{F}^{\perp} = \dim \mathfrak{E} - \dim \mathfrak{F}$.*

Prueba. Sea $\{0\} = \mathfrak{E}_0 \subset \mathfrak{E}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}$ una cadena maximal de subespacios de $\mathfrak{E}$ o sea que $\dim \mathfrak{E}_i = i$. Consideremos los subespacios perpendiculares a los de la

cadena. Por 7.7 estos forman otra cadena maximal
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0^\perp \supset \mathfrak{E}_1^\perp \supset \cdots \supset \mathfrak{E}_n^\perp = \{0\}$$
y port lo tanto $\dim \mathfrak{E}_i = n - i$. La prueba concluye al saber que cualquier subespacio está en alguna cadena maximal. ■

7.8 *Si* $\dim \mathfrak{E} < \infty$ *y* $\mathfrak{F}$ *es un subespacio de* $\mathfrak{E}$ *entonces* $\mathfrak{F}^{\perp\perp} = \mathfrak{F}$.

Prueba. De 7.7 obtenemos que $\dim \mathfrak{F} = \dim \mathfrak{F}^{\perp\perp}$. Como por 7.4.4 tenemos que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^{\perp\perp}$ y de estos dos $\mathfrak{F}^{\perp\perp} = \mathfrak{F}$. ■

Observese que a pesar de que $\dim \mathfrak{F}^\perp = \dim \mathfrak{E} - \dim \mathfrak{F}$ no necesariamente se tiene que cumplir que $\mathfrak{E} = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{F}^\perp$. Por ejemplo si x es isotrópico entonces $x \in \langle x \rangle \cap \langle x \rangle^\perp$.

Suma perpendicular

Sean $(\mathfrak{E}, \langle\langle \bullet \rangle\rangle)$ y $(\mathfrak{F}, \langle\langle \star \rangle\rangle)$ dos espacios con productos escalares *sobre el mismo campo*. En $\mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F}$ podemos definir un *funcional* llamado **suma perpendicular** (externa) de la siguiente manera:
$$\langle\langle (x, y) \clubsuit (x', y') \rangle\rangle = \langle\langle x \bullet x' \rangle\rangle + \langle\langle y \star y' \rangle\rangle.$$
La propiedad fundamental de la suma perpendicular es que todos los vectores en $\mathfrak{E}$ (aquellos de la forma $(x, 0)$) son perpendiculares a todos los vectores en $\mathfrak{F}$ (aquellos de la forma $(0, y)$) ya que $\langle\langle x \bullet 0 \rangle\rangle + \langle\langle 0 \star y \rangle\rangle = 0$.

7.9 *La suma perpendicular de dos productos escalares es un funcional bilineal.*

Prueba. La comprobación de que $\langle\langle \clubsuit \rangle\rangle$ es bilineal es rutinaria. Por ejemplo
$$\langle\langle (x, y) + (a, b) \clubsuit (x', y') \rangle\rangle = \langle\langle (x + a, y + b) \clubsuit (x', y') \rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle x + a \bullet x' \rangle\rangle + \langle\langle y + b \star y' \rangle\rangle = \langle\langle x \bullet x' \rangle\rangle + \langle\langle a \bullet x' \rangle\rangle + \langle\langle y \star y' \rangle\rangle + \langle\langle b \star y' \rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle (x, y) \clubsuit (x', y') \rangle\rangle + \langle\langle (a, b) \clubsuit (x', y') \rangle\rangle$$
y las otras propiedades se prueban igual. ■

7.10 *La suma perpendicular de dos productos escalares es no singular.*

Prueba. Supongamos que $(x, y) \neq (0, 0)$ está en el nucleo izquierdo de $\langle\langle \clubsuit \rangle\rangle$. Por simetría, podemos suponer que $x \neq 0$. Entonces para todo $x' \in \mathfrak{E}$ se cumple que
$$0 = \langle\langle (x, y) \clubsuit (x', 0) \rangle\rangle = \langle\langle x \bullet x' \rangle\rangle$$
y esto contradice que $\langle\langle \bullet \rangle\rangle$ es un producto escalar.

La prueba de que el nucleo izquierdo es trivial es similar. ■

Ejercicio 2 Demuestre que $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ y $\langle\!\langle\star\rangle\!\rangle$ son simétricos si y solo si $\langle\!\langle\clubsuit\rangle\!\rangle$ es simétrico.

Ejercicio 3 Demuestre que $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ y $\langle\!\langle\star\rangle\!\rangle$ son alternantes si y solo si $\langle\!\langle\clubsuit\rangle\!\rangle$ es alternante.

Espacios irreducibles

Si $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}$ son subespacios perpendiculares y complementarios (o sea $\mathfrak{E}\cap\mathfrak{F}=\{0\}$, $\mathfrak{E}+\mathfrak{F}=\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{E}\perp\mathfrak{F}$) de un espacio $(\mathfrak{G},\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ con producto escalar entonces, escribiremos $\mathfrak{E}\bigoplus\mathfrak{F}=\mathfrak{G}$ y diremos que $(\mathfrak{G},\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ es la **suma perpendicular** (interna) de $(\mathfrak{E},\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ y $(\mathfrak{F},\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$. En este caso debido al **??**, el producto escalar en $\mathfrak{G}$ es la suma perpendicular externa de las restricciones del producto escalar a los subespacios $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F}=\mathfrak{E}^{\perp}$.

Diremos que un espacio con producto escalar es **reducible** si existen subespacios no triviales (diferentes de $\{0\}$ y todo el espacio) tales que el espacio es la suma perpendicular de ellos. En otro caso se le llama **irreducible**. Por definición de suma perpendicular un espacio es irreducibe si y solo si para cualquier subespacio no trivial $\mathfrak{H}$ se tiene que $\mathfrak{E}\neq\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}^{\perp}$.

Cualquier espacio de dimensión 1 es irreducible ya que no tiene subespacios no triviales. A un espacio $(\mathfrak{E},\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ de dimensión 2 que tiene una base $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ de vectores isotrópicos tales que $\langle\!\langle\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle=1=-\langle\!\langle\mathbf{y}\bullet\mathbf{x}\rangle\!\rangle$, se le llama **plano simpléctico**. En esta base la *forma* bilineal de $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ es $\langle\!\langle(a,b)\bullet(a',b')\rangle\!\rangle=ab'-ba'$.

7.11 *Los planos simplécticos son irreducibles.*

Prueba. Los planos simplécticos son alternantes ya que $\langle\!\langle(a,b)\bullet(a,b)\rangle\!\rangle=ab-ba=0$. Como un plano simpléctico tiene dimensión 2 los únicos subespacios no triviales tienen dimensión 1 o sea estan generados por un vector $\mathbf{a}$. Pero como $\mathbf{a}$ es isotrópico $\mathbf{a}\in\langle\mathbf{a}\rangle\cap\langle\mathbf{a}\rangle^{\perp}$. ■

Caracterización de los productos irreducibles

7.12 *Sea $(\mathfrak{E},\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ de dimensión finita con producto escalar irreducible no nulo.*
Si $(\mathfrak{E},\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ no es alternante entonces, $\dim\mathfrak{E}=1$.
Si $(\mathfrak{E},\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ es alternante entonces, es un plano simpléctico.

Prueba. Si $(\mathfrak{E},\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ no es alternante entonces existe un vector $\mathbf{x}$ que es anisotrópico y por lo tanto $\langle\mathbf{x}\rangle$ y $\langle\mathbf{x}\rangle^{\perp}$ se intersectan en el origen. Como por 7.7 $\langle\mathbf{x}\rangle$ y $\langle\mathbf{x}\rangle^{\perp}$ tienen dimensiones complementarias y son finito dimensionales entonces, $\langle\mathbf{x}\rangle$ y $\langle\mathbf{x}\rangle^{\perp}$ son complementarios. Como por hipotesis el espacio es irreducible, entonces $\langle\mathbf{x}\rangle^{\perp}$ tiene que ser trivial, o sea, de dimensión cero.

Supongamos que $(\mathfrak{E},\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ es alternante. El vector $\mathbf{x}$ es isotrópico y por lo tanto para cualquier $\beta\mathbf{x}\in\langle\mathbf{x}\rangle$ tenemos que $\langle\!\langle\mathbf{x}\bullet\beta\mathbf{x}\rangle\!\rangle=0$. Si para cualquier otro vector

$\mathbf{z} \notin \langle \mathbf{x} \rangle$ se tiene que $\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{z} \rangle\!\rangle = 0$ entonces el núcleo de $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ contiene a $\mathbf{x}$ y esto contradice que $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ es no singular.

Luego, existe $\mathbf{z} \notin \langle \mathbf{x} \rangle$ tal que $\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{z} \rangle\!\rangle = \alpha \neq 0$. Sea $\mathbf{y} = \mathbf{z}/\alpha$. Tenemos $\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = 1 = -\langle\!\langle \mathbf{y} \bullet \mathbf{x} \rangle\!\rangle$ (por ser $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ antisimétrico) y $\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} \rangle\!\rangle = 0 = \langle\!\langle \mathbf{y} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle$ (porque todo vector es isotrópico). Esto significa que el subespacio $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ es un plano simpléctico. Como los planos simpléticos son irreducibles solo nos falta por probar que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ es todo $\mathfrak{E}$.

Sea $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Si además $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^{\perp}$ entonces,

$$0 = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{u} \rangle\!\rangle = \alpha\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} \rangle\!\rangle + \beta\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \beta$$
$$0 = \langle\!\langle \mathbf{u} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \alpha\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle + \beta\langle\!\langle \mathbf{y} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \alpha$$

y por lo tanto $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \cap \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^{\perp} = \{0\}$. Por 7.7 tenemos que $\mathfrak{E} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \bigoplus\!\!\!\!\perp \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^{\perp}$. Como por hipótesis $\mathfrak{E}$ es irreducible, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^{\perp}$ tiene que ser trivial o sea $\mathfrak{E} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. ■

Espacios ortogonales y simplécticos

Como evidentemente cualquier espacio de dimensión finita con producto escalar es suma de irreducibles entonces todos los primeros se obtienen sumando perpendicularmente espacios de dimensión 1 o planos simplécticos. Un espacio *de dimensión finita* con producto escalar se le llama **ortogonal** si es suma perpendicular de espacios de dimensión 1. Un espacio *de dimensión finita* con producto escalar se le llama **simpléctico** si es suma perpendicular de planos simplécticos.

Es más cómodo pensar en los espacios ortogonales de otra manera. Diremos que un conjunto A de vectores es **ortogonal** si sus vectores son anisotrópicos y perpendiculares dos a dos, o sea si $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ se tiene que

$$(\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

La ortogonalidad es una propiedad mucho más fuerte que la independencia lineal.

7.13 *Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente.*

Prueba. Supongamos que A es ortogonal y que $\mathbf{0} = \sum_{i \in A} \alpha_i \mathbf{i}$ es una combinación lineal nula de A. Si $\mathbf{j} \in A$ entonces multiplicando por $\mathbf{j}$ obtenemos

$$0 = \langle\!\langle \mathbf{0} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \sum_{i \in A} \alpha_i \mathbf{i} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle = \sum_{i \in A} \alpha_i \langle\!\langle \mathbf{i} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle = \alpha_j \langle\!\langle \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle$$

y como $\langle\!\langle \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle \neq 0$ entonces $\alpha_j = 0$. Esto quiere decir que todos los coeficientes de la combinación lineal son iguales a cero. ■

A los conjuntos ortogonales que son bases del espacio se le llaman **bases ortogonales**. Las bases ortogonales no siempre existen.

7.14 *Un espacio es ortogonal si y solo si tiene una base ortogonal.*

Prueba. Sea $(\mathfrak{E}, \langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ un espacio de dimensión $n < \infty$ con producto escalar.

Si el espacio es ortogonal entonces existen n espacios de dimensión 1 tales que $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{E}_n$. Cualquier conjunto $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $x_i \in \mathfrak{E}_i \setminus \{0\}$ es una base de $\mathfrak{E}$. Además por definición de suma perpendicular $i \neq j \implies x_i \perp x_j$. Si se cumpliera que para cierto j se tiene que x_j es isotrópico entonces, para cualquier vector en el espacio $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ se tendría que

$$\langle\!\langle x_j \bullet y\rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle\!\langle x_j \bullet x_i\rangle\!\rangle = \alpha_j \langle\!\langle x_j \bullet x_j\rangle\!\rangle = 0$$

y esto contradeciría que $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ es no singular. Luego, A es una base ortogonal.

Recíprocamente, sea $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ una base ortogonal. Entonces, $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{E}_n$ donde $\mathfrak{E}_i = \langle x_i\rangle$. Además, las sumas directas son perpendiculares ya que si $y = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i x_i \in \mathfrak{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{E}_j$ y $z = \sum_{k=j+1}^{n} \beta_k x_k \in \mathfrak{E}_{j+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{E}_n$ entonces

$$\langle\!\langle y \bullet z\rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=j+1}^{n} \alpha_i \beta_k \langle\!\langle x_i \bullet x_k\rangle\!\rangle = 0$$

Luego, el espacio es ortogonal. ■

Ejercicio 4 Un conjunto de vectores isotrópicos $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ se le llama **conjunto de Darboux** si sus vectores son perpendiculares dos a dos excepto en el caso $\langle\!\langle x_i \bullet y_i\rangle\!\rangle = -\langle\!\langle y_i \bullet x_i\rangle\!\rangle = 1$. Pruebe que todo conjunto de Darboux es linealmente independiente. [11]

Ejercicio 5 A un conjunto de Darboux que es base del espacio se le llama **base de Darboux**. Pruebe que un espacio es simpléctico si y solo si tiene una base de Darboux. [11]

¿Y que pasa si sumamos espacios de dimensión 1 con planos simplécticos?

7.15

Si la suma perpendicular de un espacio de dimensión 1 con un plano simpléctico es un espacio con producto escalar entonces, es un espacio ortogonal sobre un campo de característrica 2.

Prueba. Un espacio de dimensión 1 es simétrico porque está generado por un vector x y $\langle\!\langle x \bullet x\rangle\!\rangle = \alpha \neq 0$ y por lo tanto no es alternante. Un plano simpléctico es alternante y por lo tanto antisimetrico.

Si el campo no es de característica 2 entonces el plano simpléctico no es simetrico y por lo tanto la suma perpendicular de ellos no sería ni simétrica ni alternante. Por 7.2 esto significa que esta suma no es un producto escalar.

Luego podemos asumir que la característica del campo es igual a 2 y por lo tanto la suma perpendicular es un producto escalar simétrico.

El plano simpléctico está generado por dos vectores isotrópicos y, z tales que

$\langle\!\langle z \bullet y \rangle\!\rangle = \langle\!\langle y \bullet z \rangle\!\rangle = 1$ (como la característica es 2, tenemos $1 = -1$). Observese que en la suma perpendicular $\langle x \rangle \oplus \langle y, z \rangle$ tenemos $\langle\!\langle x \bullet y \rangle\!\rangle = \langle\!\langle x \bullet z \rangle\!\rangle = 0$.

Los vectores definidos por las igualdades

$$a \stackrel{\text{def}}{=} x + y + z \quad , \quad b \stackrel{\text{def}}{=} x + \alpha y \quad , \quad c \stackrel{\text{def}}{=} x + (\alpha + 1)\, y + z$$

forman una base del espacio y cumplen que:

$$\langle\!\langle a \bullet a \rangle\!\rangle = \langle\!\langle b \bullet b \rangle\!\rangle = \langle\!\langle c \bullet c \rangle\!\rangle = \alpha \neq 0$$
$$\langle\!\langle a \bullet b \rangle\!\rangle = \langle\!\langle a \bullet c \rangle\!\rangle = \langle\!\langle b \bullet c \rangle\!\rangle = 0$$

o sea forman una base ortogonal (¡calcúlelo!). ■

Luego, al sumar perpendicularmente espacios de dimensión 1 obtenemos espacios ortogonales, al sumar planos simplécticos obtenemos espacios simplécticos y si mesclamos planos simplécticos con espacios de dimensión 1 obtenemos espacios ortogonales. De aqui tenemos el siguiente Teorema.

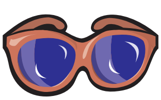
Teorema de caracterización de los productos escalares

7.16

Cualquier espacio con producto escalar de dimensión finita o es ortogonal o es simpléctico. Ambas posibilidades son excluyentes. Los espacios ortogonales son aquellos en los que el producto es simétrico pero no alternante. Los espacios simplécticos son aquellos en los cuales el producto es alternante.

Lo que sabemos de los productos escalares queda resumido en la siguiente tabla.

ortogonal	$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$	$\exists$ base ortogonal	$\Leftrightarrow$	simétrico pero no alternante
simpléctico	$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$	suma de planos simplécticos	$\Leftrightarrow$	alternante



En característica diferente de dos, la alternancia es equivalente a la antisimetría. Luego, en este caso, los espacios ortogonales son los que tienen producto escalar simétrico y los espacios simplécticos son los que tienen producto escalar antisimétrico.

La prueba del teorema de caracterización de los productos escalares se simplifica algo si se excluyen los campos de característica 2. Nosotros la expusimos en toda su generalidad debido a que los campos de característica 2 tienen mucha importancia para las ciencias de la computación.

La prueba faltante

Ahora probaremos el resultado 7.2 que dice que todo producto escalar es simmetrico o alternante. Recomiendo omitir esta prueba en una primera lectura.

Diremos que un vector x es **simétrico** si para cualquier vector y se tiene que $\langle\!\langle x \bullet y \rangle\!\rangle = \langle\!\langle y \bullet x \rangle\!\rangle$. A los vectores que no son simétricos los llamaremos **asimétricos**.

Ejercicio 6 Pruebe que el conjunto de todos los vectores simétricos es un subespacio.

7.17 *Todo vector asimétrico es isotrópico.*

Prueba. Sea $\mathfrak{a}$ un vector asimétrico. Entonces existe $\mathfrak{b}$ tal que $\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle \neq \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle$. Tenemos que

$$0 = \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle \stackrel{1}{=} \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet(\mathfrak{a}\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle\mathfrak{b})\rangle\!\rangle \stackrel{2}{=}$$
$$= \langle\!\langle (\mathfrak{a}\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle\mathfrak{b})\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle \stackrel{1}{=} \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathfrak{b}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle =$$
$$= \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle\left(\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \mathfrak{b}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle\right) \stackrel{3}{\Rightarrow} \left(\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle = 0\right)$$

Las igualdades marcadas con 1 son por bilinearidad. La igualdad marcada con 2 es por simetría de la perpendicularidad. La implicación 3 es porque en un campo no hay divisores de cero y la definición de $\mathfrak{b}$. ■

7.18 *Los vectores asimétricos son perpendiculares a los simétricos.*

Prueba. Sea $\mathfrak{a}$ un vector asimétrico. Entonces existe $\mathfrak{b}$ tal que $\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle \neq \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle$. Sea $\mathfrak{x}$ cualquier vector simétrico. Tenemos que

$$0 = \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{x}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{x}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle \stackrel{1}{=} \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet(\mathfrak{x}\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{x}\rangle\!\rangle\mathfrak{b})\rangle\!\rangle \stackrel{2}{=}$$
$$= \langle\!\langle (\mathfrak{x}\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{x}\rangle\!\rangle\mathfrak{b})\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle \stackrel{1}{=} \langle\!\langle \mathfrak{x}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{x}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathfrak{b}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle \stackrel{3}{=}$$
$$= \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{x}\rangle\!\rangle\left(\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{b}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \mathfrak{b}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle\right) \stackrel{4}{\Rightarrow} \left(\langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{x}\rangle\!\rangle = 0\right)$$

Las igualdades marcadas con 1 son por bilinearidad. La igualdad marcada con 2 es por simetría de la perpendicularidad. La igualdad marcada con 3 es porque $\mathfrak{x}$ es simétrico. La implicación 4 es porque en un campo no hay divisores de cero y la definición de $\mathfrak{b}$. ■

El lector debe observar que las pruebas de 7.17 y 7.18 son casi iguales.

7.19 *Si existe un vector asimétrico entonces, todo vector es isotrópico.*

Prueba. Sea $\mathfrak{a}$ un vector asimétrico. Sea $\mathfrak{x}$ cualquier vector. Si $\mathfrak{x}$ es asimétrico entonces, usando 7.17 obtenemos que $\mathfrak{x}$ es isotrópico. Luego, podemos suponer que $\mathfrak{x}$ es simétrico. Como los vectores simétricos forman un subespacio entonces, el vector $\mathfrak{x}+\mathfrak{a}$ tiene que ser asimétrico. Por 7.17 $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{x}+\mathfrak{a}$ son isotrópicos. Por 7.18 $\mathfrak{x}\perp\mathfrak{a}$. Luego,

$$0 = \langle\!\langle \mathfrak{x}+\mathfrak{a}\bullet\mathfrak{x}+\mathfrak{a}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathfrak{x}\bullet\mathfrak{x}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{x}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathfrak{x}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathfrak{a}\bullet\mathfrak{a}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathfrak{x}\bullet\mathfrak{x}\rangle\!\rangle$$

lo que prueba que cualquier vector es isotrópico. ■

Obviamente 7.19 es equivalente a 7.2.

Ejercicio 4 (Sección 7.3 página 7) Sea $0 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \mathbf{x}_i + \beta_i \mathbf{y}_i)$ una combinación lineal nula de un conjunto de Darboux. Multiplicando por $\mathbf{x}_j$ obtenemos

$$0 = \langle\!\langle \mathbf{x}_j \bullet 0 \rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \langle\!\langle \mathbf{x}_j \bullet \mathbf{x}_i \rangle\!\rangle + \beta_i \langle\!\langle \mathbf{x}_j \bullet \mathbf{y}_i \rangle\!\rangle) = \beta_j \langle\!\langle \mathbf{x}_j \bullet \mathbf{y}_j \rangle\!\rangle = \beta_j$$

y por lo tanto todos los β_j son cero.
Multiplicando por $\mathbf{y}_j$ obtenemos

$$0 = \langle\!\langle 0 \bullet \mathbf{y}_j \rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \langle\!\langle \mathbf{x}_i \bullet \mathbf{y}_j \rangle\!\rangle + \beta_i \langle\!\langle \mathbf{y}_i \bullet \mathbf{y}_j \rangle\!\rangle) = \alpha_j \langle\!\langle \mathbf{x}_j \bullet \mathbf{y}_j \rangle\!\rangle = \alpha_j$$

y por lo tanto todos los α_j son cero.

Ejercicio 5 (Sección 7.3 página 7) Sea $(\mathfrak{E}, \langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle)$ un espacio de dimensión $2n < \infty$ con producto escalar.
Si el espacio es simpléctico entonces existen n planos simplécticos tales que $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{E}_n$. Por definición de plano simplectico existe una base de vectores isotrópicos $x_i, y_i \in \mathfrak{E}_i$ tales que $\langle\!\langle \mathbf{x}_i \bullet \mathbf{y}_i \rangle\!\rangle = -\langle\!\langle \mathbf{y}_i \bullet \mathbf{x}_i \rangle\!\rangle = 1$. Por definición de suma perpendicular, la base de todo el espacio $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es una base de Darboux.
Reciprocamente, si $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es una base de Darboux entonces los planos $\mathfrak{E}_1 = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \rangle$ son simplécticos y el espacio es suma perpendicular de ellos.

Guía de estudio

1. Definición de producto escalar.
2. Definición de vector isotrópico. Definiciones de productos escalares simétricos, alternantes, y antisimétricos.
3. Definición de perpendicularidad.
4. Definición de subespacio perpendicular.
5. 1)$\mathfrak{E}^{\perp} = \{0\}$ y $\{0\}^{\perp} = \mathfrak{E}^{\#}$. 2)$(A \subseteq B) \implies (A^{\perp} \supseteq B^{\perp})$. 3)$A^{\perp} = \langle A \rangle^{\perp}$ 4)$A \subseteq A^{\perp\perp}$.
6. Si $\mathfrak{E}$ es de dimension finita, $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es un conjunto de vectores LI y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ es un conjunto de escalares entonces existe un vector y tal que $\forall i$ $\langle\!\langle x_i \bullet y \rangle\!\rangle = \alpha_i$.
7. Sean $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ subespacios de $\mathfrak{E}$ que es de dimensión finita. Si $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ entonces, $(\mathfrak{F}^{\perp} \supset \mathfrak{G}^{\perp})$.
8. Si $\mathfrak{E}$ es de dimension finita y $\mathfrak{F}$ es un subespacio de $\mathfrak{E}$ entonces, $\dim \mathfrak{F}^{\perp} = \dim \mathfrak{E} - \dim \mathfrak{F}$.
9. Si $\dim \mathfrak{E} < \infty$ y $\mathfrak{F}$ es un subespacio de $\mathfrak{E}$ entonces $\mathfrak{F}^{\perp\perp} = \mathfrak{F}$.
10. Definición de suma perpendicular externa.
11. La suma perpendicular de dos productos escalares es un funcional bilineal.
12. La suma perpendicular de dos productos escalares es no singular.
13. Definición de suma perpendicular (interna).
14. Definición de plano simplectico.
15. Los planos simplécticos son irreducibles.
16. Caracterización de los productos irreducibles (enunciado y demostración)
17. Definición de espacio ortogonal y espacio simpléctico.
18. Definición de conjunto ortogonal
19. Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente.
20. Un espacio es ortogonal si y solo si tiene una base ortogonal.
21. ¿Qué se obtiene cuando se suma perpendicularmente un espacio de dimensión 1 con un plano simpléctico? (sin demostración)
22. Enuncie el Teorema de caracterización de los productos escalares.