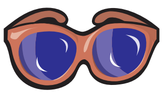
7.4 Productos escalares simétricos

Funcionales cuadráticos

Sea $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle : \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional bilineal (no necesariamente producto escalar). A la función $Q : \mathfrak{E} \ni x \longmapsto \langle\!\langle x \bullet x \rangle\!\rangle \in \mathbb{K}$ se le llama **funcional cuadrático** del funcional bilineal $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$. De la misma manera que los funcionales bilineales, escogida una base, son *formas bilineales*, los funcionales cuadráticos en una base son *formas cuadráticas* o sea, polinomios de muchas variables tales que el grado de cualquier monomio es igual a 2.



En todo lo que relacionado a las formas y funcionales cuadráticos asumiremos en lo que sigue que la característica del campo es diferente de 2. La teoría de las formas cuadráticas en característica 2 es muy diferente y nosotros no la estudiaremos.

7.1 *Si Q es el funcional cuadrático del funcional bilineal $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ entonces,*

$$\langle\!\langle x * y \rangle\!\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}$$

es un funcional bilineal. Si $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ es simétrico entonces, $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle = \langle\!\langle * \rangle\!\rangle$.

Prueba. El lector debe observar que la definición de es correcta ya que en característica diferente de dos el elemento del campo $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$ tiene inverso multiplicativo.

Usando la bilinearidad de $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ y la definición de Q obtenemos que

$$\langle\!\langle x * y \rangle\!\rangle = \frac{\langle\!\langle x \bullet y \rangle\!\rangle + \langle\!\langle y \bullet x \rangle\!\rangle}{2}$$

el cual es obviamente un funcional bilineal simétrico y que coincide con $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ si este último es simétrico. ■

El resultado anterior establece (en característica diferente de 2) una correspondencia uno a uno entre los funcionales cuadráticos y los funcionales bilineales simétricos. Por esto, tenenos que:

Toda la teoría de los funcionales y formas cuadráticas es equivalente a la teoría de los funcionales bilineales simétricos.

El lector puede pensar que simplemente son dos lenguajes para lo mismo. Pongamos varios ejemplos de esto.

- Una funcion $Q : \mathfrak{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ es un funcional cuadrático (el funcional cuadrático de algún funcional bilineal) si y solo si la función

  $$\mathfrak{E} \oplus \mathfrak{E} \ni x \longmapsto Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \in \mathbb{K}$$

  es un funcional bilineal.
- Para cualquier funcional cuadrático $Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x)$, en particular, $Q(0) = 0$.

- Un espacio en el cual está dado un funcional cuadrático se le llama **espacio cuadrático**.
- En un espacio cuadrático se dice que dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ son **perpendiculares** si $Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{y})$.
- El **nucleo** de un funcional cuadrático está formado por los vectores que son perpendiculares a cualquier vector.
- Un funcional cuadrático es **no singular** (o **no degenerado**) si su nucleo es trivial.

Ocupemonos ahora de otro ejemplo un poco más elaborado de este cambio de lenguaje. Una forma cuadrática es **diagonal** si ella es una combinación lineal de los cuadrados de las variables. Así por ejemplo, $x^2 + 2y^2$ es diagonal y $x^2 + 2xy$ no lo es. Una forma cuadrática es diagonal, si y solo si la matriz de su producto bilineal simétrico es diagonal.

7.2 *Si $Q : \mathfrak{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ es un funcional cuadrático no singular entonces, existe una base de $\mathfrak{E}$ en la cual Q es una forma cuadrática diagonal.*

Prueba. Sea $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ el funcional bilineal de Q. Por hipótesis $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ es no singular y simétrico y por lo tanto $(\mathfrak{E}, \langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle)$ es un espacio ortogonal. Sea A una base ortogonal. Tenemos que si $\mathbf{i}$, $\mathbf{j} \in A$ entonces $(\mathbf{i} \neq \mathbf{j}) \Rightarrow (\mathbf{i} \perp \mathbf{j})$. Luego si $\mathbf{x} = \sum_{i \in A} x_i \mathbf{i}$ entonces,

$$Q(\mathbf{x}) = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} \rangle\!\rangle = \sum_{i \in A} \sum_{j \in A} x_i x_j \langle\!\langle \mathbf{i} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle = \sum_{i \in A} x_i^2 \langle\!\langle \mathbf{i} \bullet \mathbf{i} \rangle\!\rangle = \sum_{i \in A} Q(\mathbf{i})\, x_i^2$$

que es lo que se requería probar. ■

Ejercicio 1 Muestre que la suposición de que Q es no singular en 7.2 no es relevante.

Complementos y proyecciones ortogonales (Gram–Schmidt)

Sea $(\mathfrak{E}, \langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle)$ un espacio ortogonal y $\mathfrak{F}$ un subespacio de $\mathfrak{E}$. Puede ocurrir o no que $\mathfrak{E} = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{F}^\perp$. Si esto ocurre, entonces la suma directa es perpendicular y se dice que $\mathfrak{F}^\perp$ es el **complemento ortogonal** de $\mathfrak{F}$.

Si la restricción de $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ a un subespacio $\mathfrak{F}$ tiene nucleo no trivial entonces diremos que $\mathfrak{F}$ es degenerado

7.3 *Un subespacio tiene complemento ortogonal si y solo si no es degenerado.*

Prueba. Sea $\mathfrak{F}$ un subespacio. Si $\mathfrak{F}$ es degenerado entonces existe un vector no nulo $\mathbf{y} \in \mathfrak{F}$ tal que $\mathbf{y} \perp \mathfrak{F}$. Luego, $\mathbf{y} \in \mathfrak{F}^\perp$ y por lo tanto $\mathfrak{F}$ no tiene complemento ortogonal.

Recíprocamente si $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} + \mathfrak{F}^\perp$ entonces por **??** se tiene que cumplir que $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$.

Si el vector no nulo $\mathfrak{y} \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}^\perp$ entonces $\mathfrak{y} \perp \mathfrak{F}$ y por lo tanto $\mathfrak{y}$ está en el nucleo de la restricción del producto a $\mathfrak{F}$. ■

Si $\mathfrak{E} = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{F}^\perp$ entonces todo vector $\mathbf{x} \in \mathfrak{E}$ se expresa de forma única como una suma $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ donde $\mathbf{a} \in \mathfrak{F}$ y $\mathbf{b} \in \mathfrak{F}^\perp$ y por lo tanto $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. En este caso al vector $\mathbf{a}$ se le llama la **proyección ortogonal** de $\mathbf{x}$ al subespacio $\mathfrak{F}$ y depende exclusivamente del vector $\mathbf{a}$ y del subespacio $\mathfrak{F}$.

Las proyecciones ortogonales son un caso especial de las proyecciones en general que estudiamos al principio del capítulo de transformaciones lineales. En particular, *las proyecciones ortogonales son transformaciones lineales.*

Ahora nos ocuparemos en construir la proyeccion ortogonal. Sea A un conjunto ortogonal o sea, un conjunto de vectores anisotrópicos perpendiculares dos a dos. Como $\mathfrak{E}$ es de dimensión finita y todo conjunto ortogonal es LI, el conjunto A tiene que ser finito. Sea $\mathbf{x}$ un vector arbitrario. Denotemos por $\pi_A(\mathbf{x})$ al vector del recuadro de la derecha.

$$\sum_{i \in A} \frac{\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{i} \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle \mathbf{i} \bullet \mathbf{i} \rangle\!\rangle} \mathbf{i}$$

7.4 *El vector $\pi_A(\mathbf{x})$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ al subespacio $\langle A \rangle$.*

Prueba. Obviamente $\pi_A(\mathbf{x}) \in \langle A \rangle$. Tenemos que demostrar que $\mathbf{x} - \pi_A(\mathbf{x}) \in \langle A \rangle^\perp$ o sea, que para todo vector $\mathbf{y} \in \langle A \rangle$ se cumple que $\langle\!\langle (\mathbf{x} - \pi_A(\mathbf{x})) \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = 0$. Probar esto es equivalente a probar que $\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \pi_A(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle$.

Supongamos que $\mathbf{y} = \mathbf{j} \in A$. Efectivamente, como $(\mathbf{i} \neq \mathbf{j}) \Rightarrow (\langle\!\langle \mathbf{i} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle = 0)$ tenemos que

$$\langle\!\langle \pi_A(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle = \sum_{i \in A} \frac{\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{i} \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle \mathbf{i} \bullet \mathbf{i} \rangle\!\rangle} \langle\!\langle \mathbf{i} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle = \frac{\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle} \langle\!\langle \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle$$

Sea ahora $\mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in A} \alpha_j \mathbf{j}$ un vector arbitrario en $\langle A \rangle$. Tenemos que

$$\langle\!\langle \pi_A(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \sum_{j \in A} \alpha_j \langle\!\langle \pi_A(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle = \sum_{j \in A} \alpha_j \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{j} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle$$

que es lo que se necesitaba demostrar. ■

Como $\pi_A(\mathbf{x}) \in \langle A \rangle$ tenemos que si $\mathbf{x} \notin \langle A \rangle$ entonces, $\mathbf{x} - \pi_A(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Por 7.4 $(\mathbf{x} - \pi_A(\mathbf{x})) \perp A$ y por lo tanto en el conjunto $B \stackrel{\text{def}}{=} A \cup \{\mathbf{x} - \pi_A(\mathbf{x})\}$ dos vectores distintos cualesquiera son perpendiculares. Lo único que le falta a B para ser ortogonal es que $\mathbf{x} - \pi_A(\mathbf{x})$ sea anisotrópico. Desafortunadamente, no es cierto en general que $(\mathbf{x} \notin \langle A \rangle) \Rightarrow (\mathbf{x} - \pi_A(\mathbf{x}) \text{ es anisotrópico})$.

Ejercicio 2 Sea $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ el producto escalar en $\mathbb{R}^3$ definido por la forma cuadrática $x^2 + y^2 - z^2$. El conjunto $A = \{(1,0,0)\}$ es ortogonal. Sea $\mathbf{x} = (1,1,1)$. Calcule el vector $\mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} - \pi_A(\mathbf{x})$. ¿Es $\mathbf{y}$ anisotrópico? [7]

Sin embargo, hay ejemplos de importancia fundamental (el producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$ y en general cualquier producto interior sobre $\mathbb{R}$) en los cuales todo vector es anisotrópico. En los espacios que cumplen esta condición, debido a 7.4 obtenemos que $(A \text{ ortogonal y } \mathbf{x} \notin \langle A \rangle) \Rightarrow (A \cup \{\mathbf{x} - \pi_A(\mathbf{x})\} \text{ ortogonal})$ y esto nos permite formular el siguiente algoritmo llamado proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt:

Requisito: Producto escalar $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ sin vectores isotrópicos.
Entrada: Base arbitraria $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$.
Salida: Base ortogonal $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$.
Algoritmo: $\begin{cases} \mathbf{b}_1 \leftarrow \mathbf{a}_1;\ B \leftarrow \{\mathbf{b}_1\}; \\ \text{Desde } k = 2 \text{ hasta } n \begin{cases} \mathbf{b}_k \leftarrow (\mathbf{a}_k - \pi_B(\mathbf{a}_k)); \\ B \leftarrow B \cup \{\mathbf{b}_k\}; \end{cases} \end{cases}$

Ejemplo: Supongamos que en $\mathbb{R}^3$ está definido el siguiente funcional bilineal

$$\langle\!\langle (x,y,z) \bullet (x',y',z') \rangle\!\rangle = xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

Este funcional bilineal es simétrico y su forma cuadrática es $2(xy + xz + yz)$. Los vectores de la base canónica son todos isotrópicos y Gram–Schmidt no siempre funciona. Si funciona o no depende de que en cada paso se obtengan vectores anisotrópicos y esto a su vez depende de la base original escogida. Por esto, haremos "trampa" ya que el autor conoce una base en la cual sí funciona.

Definiremos $\mathbf{e}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (1,0,1)$ y $\mathbf{e}_3 = (0,1,1)$. Es evidente que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y que $\langle\!\langle \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_2 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{e}_3 \rangle\!\rangle = 2$. Sin embargo, esta base no es ortogonal ya que $\langle\!\langle \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2 \rangle\!\rangle = 3$.

Apliquemos el resultado 2 . Sea $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$. Calculando obtenemos

$$\mathbf{e}_2 - \frac{\langle\!\langle \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle}\mathbf{a} = \frac{1}{2}(-1,-3,2)$$

por lo que definiremos $\mathbf{b} = (1,3,-2)$. Tenemos $\langle\!\langle \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \rangle\!\rangle = 0$ y $\langle\!\langle \mathbf{b} \bullet \mathbf{b} \rangle\!\rangle = -10$. Como $\mathbf{b}$ es anisotrópico podemos seguir adelante. Nuevamente, calculando obtenemos

$$\mathbf{e}_3 - \frac{\langle\!\langle \mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle}\mathbf{a} - \frac{\langle\!\langle \mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{b} \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle \mathbf{b} \bullet \mathbf{b} \rangle\!\rangle}\mathbf{b} = \frac{2}{5}(-3,1,1)$$

por lo que definiremos $\mathbf{c} = (-3,1,1)$. El conjunto $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ es ortogonal y para un vector $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ expresado en esta base se tiene que nuestra forma cuadrática es igual a $2(\alpha^2 - 5\beta^2 - 5\gamma^2)$. Observese que $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = (\alpha + \beta - 3\gamma, \alpha + 3\beta + \gamma, -2\beta + \gamma)$ y que otra manera de interpretar esto es que si en el polinomio $xy + xz + yz$ se hacen los cambios de variables

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta - 3\gamma \\ y &= \alpha + 3\beta + \gamma \\ z &= -2\beta + \gamma \end{aligned}$$

entonces se obtiene $\alpha^2 - 5\beta^2 - 5\gamma^2$. Esto se puede comprobar directamente con algunos cálculos elementales.

Los vectores isotrópicos son los ceros de una forma cuadrática los cuales forman una hipercuádrica en $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto son un conjunto de medida cero. Esto quiere decir que Gram–Schmidt "casi siempre" funciona.

Metodo de Lagrange

El método de Lagrange es ampliamente conocido en la teoría de las formas cuadráticas. Aquí está traducido al lenguage de los productos escalares simétricos. El objetivo es el mismo que Gram–Schmidt: dada una base del espacio hay que "ortogonalizarla". A diferencia de Gram–Schmidt el método de Lagrange funciona para cualquier producto escalar ortogonal simétrico sobre un campo de característica diferente de dos.

Sea $(\mathfrak{E}, \langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ un espacio ortogonal sobre un campo $\mathbb{K}$ de característica diferente de dos.

7.5 *Si todos los vectores de una base A son isotrópicos entonces, existen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ tales que $\{\mathbf{x}+\mathbf{y}\} \cup A \setminus \{\mathbf{x}\}$ es una base y $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ es anisotrópico.*

Prueba. Supongamos que todos los vectores de la base A son isotrópicos. Si ocurriera que los vectores de A fueran perpendiculares dos a dos entonces, el producto escalar sería alternante (¡pruébelo!) y por lo tanto no podría ser ortogonal. Luego, en A existen dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tales que $\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle \neq 0$. Tenemos que

$$\langle\!\langle \mathbf{x}+\mathbf{y} \bullet \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} \rangle\!\rangle + 2\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathbf{y} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = 2\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle \neq 0$$

y es claro que $\{\mathbf{x}+\mathbf{y}\} \cup A \setminus \{\mathbf{x}\}$ es una base porque $\mathbf{x}+\mathbf{y} \notin \langle A \setminus \{\mathbf{x}\} \rangle$. ■

Supongamos $\dim \mathfrak{E} \geq 2$ y que la base A contiene un vector anisotrópico $\mathbf{a}$. Denotemos $B \stackrel{\text{def}}{=} A \setminus \{\mathbf{a}\}$. Sea $\pi_{\mathbf{a}} : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ la funcion definida por

$$\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle \mathbf{a} - \langle\!\langle \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle \mathbf{x}.$$

Como $\pi_{\mathbf{a}}$ es la suma de dos operadores lineales, es un operador lineal.

7.6 *El conjunto $\pi_{\mathbf{a}}(B)$ es LI y es perpendicular al vector $\mathbf{a}$. El conjunto $\pi_{\mathbf{a}}(B) \cup \{\mathbf{a}\}$ es una base del espacio. La restricción $(\langle \pi_{\mathbf{a}}(B) \rangle, \langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle)$ es un espacio ortogonal.*

Prueba. Para escribir menos, denotemos $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \langle\!\langle \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle$. Sabemos que $\alpha \neq 0$. Supongamos que hay una combinación lineal nula de $\pi_{\mathbf{a}}(B)$ .Tenemos que

$$0 = \sum_{i \in B} \beta_i \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{i}) = \left(\sum_{i \in B} \beta_i \langle\!\langle \mathbf{i} \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle \right) \mathbf{a} - \alpha \sum_{i \in B} \beta_i \mathbf{i} = \gamma \mathbf{a} - \alpha \sum_{i \in B} \beta_i \mathbf{i}$$

para algún $\gamma \in \mathbb{K}$. Como $A = B \cup \{\mathbf{a}\}$ es una base entonces todos los coeficientes β_i tienen que ser cero. Esto demuestra que $\pi_{\mathbf{a}}(B)$ es LI y de paso que $\pi_{\mathbf{a}}(B)$ tiene la misma cantidad de vectores que B.

Sea $\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{i}) \in \pi_{\mathbf{a}}(B)$ entonces

$$\langle\!\langle \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{i}) \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{i} \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle \langle\!\langle \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle - \langle\!\langle \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle \langle\!\langle \mathbf{i} \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle = 0$$

y esto demuestra que $\mathbf{a} \perp \pi_{\mathbf{a}}(B)$.

Como $\pi_{\mathbf{a}}(B)$ es LI y le falta un solo vector para ser una base del espacio solo tenemos que probar que $\mathbf{a} \notin \langle \pi_{\mathbf{a}}(B) \rangle$. Supongamos que $\mathbf{a} \in \langle \pi_{\mathbf{a}}(B) \rangle$. Entonces para ciertos coeficientes ω_j tenemos que

$$0 = -\mathbf{a} + \sum_{j \in B} \omega_j \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{j}) = \left(-1 + \sum_{j \in B} \omega_i \langle\!\langle \mathbf{j} \bullet \mathbf{a} \rangle\!\rangle \right) \mathbf{a} - \alpha \sum_{j \in B} \omega_j \mathbf{j} = \rho \mathbf{a} - \alpha \sum_{j \in B} \omega_j \mathbf{j}$$

para algún $\rho \in \mathbb{K}$. Como $A = B \cup \{\mathbf{a}\}$ es una base entonces todos los coeficientes ω_j tienen que ser cero. Luego, $\mathbf{a} = 0$ y esto es una contradicción. Luego, $\pi_{\mathbf{a}}(B) \cup \{\mathbf{a}\}$ es una base del espacio.

Denotemos $\mathfrak{F} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \pi_{\mathbf{a}}(B) \rangle$. Solo nos queda probar que la restricción de $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ a $\mathfrak{F}$ es un producto escalar ortogonal. La simetría se preserva. Solo nos falta ver que es no singular.

Como $\pi_{\mathbf{a}}(B) \cup \{\mathbf{a}\}$ es una base del espacio entonces $\mathfrak{F}^{\perp} = \langle \mathbf{a} \rangle$ y $\mathfrak{E} = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{F}^{\perp}$. Usando 7.3 obtenemos que $(\mathfrak{F}, \langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle)$ es no degenerado. ■

Ejercicio 3 Pruebe que $\pi_{\mathbf{a}}$ es la proyección ortogonal al subespacio $\mathbf{a}^{\perp}$.

Ya estamos listos para exponer el método de Lagrange para ortogonalizar una base. Sea A una base arbitraria de $\mathfrak{E}$. Si $\dim \mathfrak{E} = 1$ entonces A ya es ortogonal. Supongamos que sabemos aplicar el método de Lagrange para todos los espacios ortogonales de dimension $n - 1$ y sea $\mathfrak{E}$ un espacio ortogonal de dimensión $n \geq 2$.

Si A no contiene vectores anisotrópicos entonces, le aplicamos 7.5 y cambiamos a una base que sí contiene vectores anisotrópicos.

Así, podemos suponer que A contiene un vector anisotrópico $\mathbf{a}$ y entonces cambiamos la base A por la base $\pi_{\mathbf{a}}(B) \cup \{\mathbf{a}\}$. Por 7.6 el vector $\mathbf{a}$ es perpendicular a $\mathfrak{F} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \pi_{\mathbf{a}}(B) \rangle$. Además, $\mathfrak{F}$ tiene dimensión $n - 1$ y $(\mathfrak{F}, \langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle)$ es un espacio ortogonal al que le podemos aplicar el método de Lagrange.

El lector podrá apreciar mejor la diferencia geométrica entre Gram–Schmidt y Lagrange si piensa en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico y en una base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. En Gram–Schmidt proyectamos el vector $\mathbf{a}$ a la linea perpendicular al plano $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. En Lagrange proyectamos los vectores $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ al plano perpendicular al vector $\mathbf{a}$.

Ejercicio 2 (Sección 7.4 página 3) Tenemos

$$\pi_A(\mathbf{x}) = \pi_{\{(1,0,0)\}}(1,1,1) = \frac{(1,1,1)\cdot(1,0,0)}{(1,0,0)\cdot(1,0,0)}(1,0,0) = (1,0,0)$$

y por lo tanto $\mathbf{x} - \pi_A(\mathbf{x}) = (0,1,1)$ el cual es isotrópico.

Guía de estudio

1. Definición de funcional cuadrático de un funcional bilineal.
2. Si Q es el funcional cuadrático del funcional bilineal $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ entonces, $\langle\!\langle x * y\rangle\!\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{Q}(x+y)-\mathrm{Q}(x)-\mathrm{Q}(y)}{2}$ es un funcional bilineal. Si $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ es simétrico entonces, $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle = \langle\!\langle *\rangle\!\rangle$.
3. Si $\mathrm{Q} : \mathfrak{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ es un funcional cuadrático no singular entonces, existe una base de $\mathfrak{E}$ en la cual Q es una forma cuadrática diagonal.