6.6 Productos interiores

Los productos interiores se definen solo en espacios vectoriales sobre los complejos o sobre los reales. En esta sección $\mathbb{K}$ denota uno de estos dos campos. El lector debe conocer los conceptos de módulo, el conjugado y la parte real de un número complejo.

$$|a+bi| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\overline{a+bi} \overset{\text{def}}{=} a-bi$$
$$\operatorname{Re}(a+bi) \overset{\text{def}}{=} a$$

y sus propiedades más elementales:

$$\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y} \quad \overline{xy}=\overline{x}\,\overline{y} \quad x\overline{x}=|x|^2$$
$$x+\overline{x}=2\operatorname{Re}x \quad \operatorname{Re}x \leq |x| \quad (x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{x}=x)$$

Si $\mathfrak{E}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ entonces a una función $f:\mathfrak{E}\to\mathbb{K}$ se le llama **funcional semilineal** si $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in E\ \forall\alpha\in\mathbb{C}$ se cumple que

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}) \text{ y } f(\alpha\mathbf{x})=\overline{\alpha}f(\mathbf{x})$$

Los funcionales semilineales sobre $\mathbb{R}$ son los funcionales lineales.

Definición

Sea $\mathfrak{E}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. A una función

$$\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle : \mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}\ni(\mathbf{x},\mathbf{y})\mapsto\langle\!\langle\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle\in\mathbb{K}$$

se le llama **producto interior** si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall\mathbf{y}\in\mathfrak{E}$ la función $\langle\!\langle\bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle : \mathfrak{E}\ni\mathbf{x}\mapsto\langle\!\langle\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle\in\mathbb{K}$ es un funcional lineal.
2. $\forall\mathbf{x}\in\mathfrak{E}$ la función $\langle\!\langle\mathbf{x}\bullet\rangle\!\rangle : \mathfrak{E}\ni\mathbf{x}\mapsto\langle\!\langle\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle\in\mathbb{K}$ es un funcional semilineal.
3. (Simetría conjugada) $\langle\!\langle\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}\rangle\!\rangle=\overline{\langle\!\langle\mathbf{y}\bullet\mathbf{x}\rangle\!\rangle}$ y en particular $\langle\!\langle\mathbf{x}\bullet\mathbf{x}\rangle\!\rangle$ es siempre un real.
4. (Definida positiva) $\langle\!\langle\mathbf{x}\bullet\mathbf{x}\rangle\!\rangle\geq 0$ y $(\langle\!\langle\mathbf{x}\bullet\mathbf{x}\rangle\!\rangle=0)\Rightarrow\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Ejemplos de productos interiores

1. El producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$.
2. En $\mathbb{C}^n$ el producto definido por

$$\langle\!\langle(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\bullet(\beta_1,\ldots,\beta_n)\rangle\!\rangle=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\beta_i}$$

3. En el espacio de todas las funciones reales continuas en el intervalo $[0,1]$ el producto definido por

$$\langle\!\langle f\bullet g\rangle\!\rangle=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

La norma

Sea un vector $\mathbf{x}$ en un espacio con producto interior. Definiremos $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} \rangle\!\rangle}$ y la llamaremos la **norma** de $\mathbf{x}$. Veamos las primeras propiedades de la norma.

Teorema de Pitágoras

6.1 *Si* $\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = 0$ *entonces,* $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

Prueba. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$. ■

6.2 $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$.

Prueba. $\|\alpha\mathbf{x}\| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}\, \|\mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$. ■

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

6.3 $|\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$.

Prueba. Sea

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \frac{\langle\!\langle \mathbf{y} \bullet \mathbf{x} \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} \rangle\!\rangle}\mathbf{x}$$

(compárese con Gram-Schmidt). Tenemos $\langle\!\langle \mathbf{z} \bullet \mathbf{x} \rangle\!\rangle = 0$ y por lo tanto

$$0 \leq \|\mathbf{z}\|^2 = \langle\!\langle \mathbf{z} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle = \|\mathbf{y}\|^2 - \frac{\langle\!\langle \mathbf{y} \bullet \mathbf{x} \rangle\!\rangle \langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} = \|\mathbf{y}\|^2 - \frac{|\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle|^2}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

y despejando obtenemos lo que se quería demostrar. ■

Desigualdad del Triángulo

6.4 $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Prueba. Tenemos

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\,|\langle\!\langle \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \rangle\!\rangle|$$

y usando Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$$

y sacando raiz cuadrada obtenemos lo que se quería demostrar. ■

Guía
de estudio

1. Definición de funcional semilineal.
2. Definición de producto interior.
3. Definición de norma
4. Teorema de Pitágoras
5. $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$.
6. Desigualdad de Cauchy-Schwarz
7. Desigualdad del Triángulo