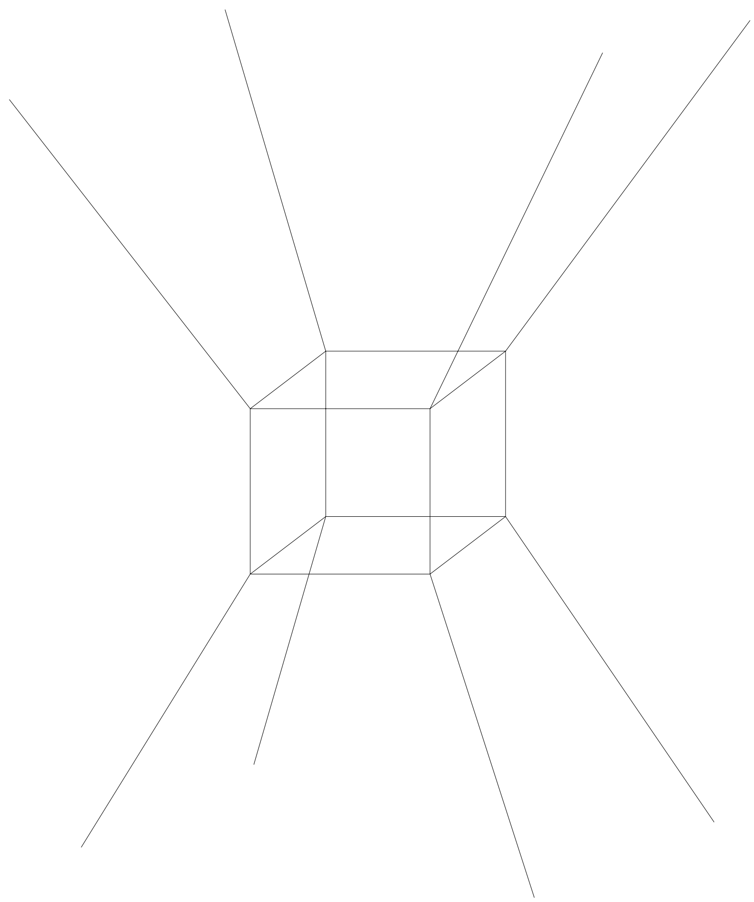
Poliedros Regulares Proyectivos

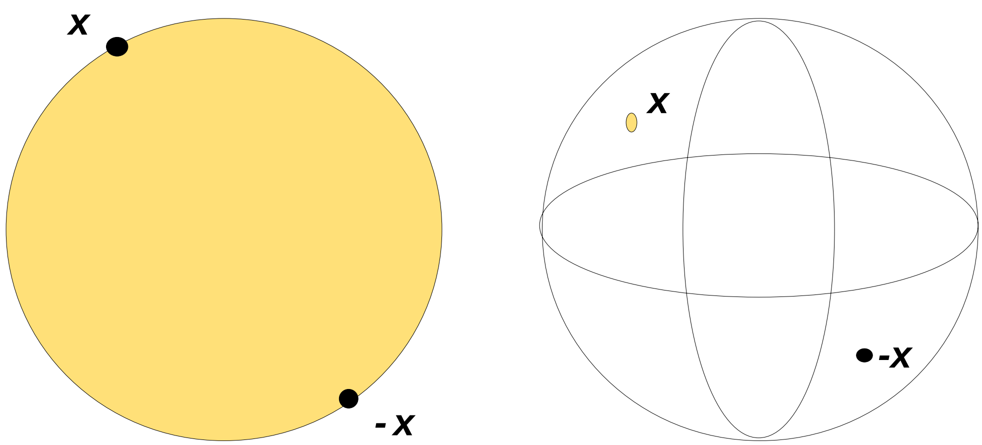
Jorge Arocha
Javier Bracho
Luis Montejano

Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
México, D.F. 04510



La sallita

¿Que es el espacio proyectivo?



$$B_2 \,/\, \{-1,1\} \;=\; RP^2 = \; S_2 \,/\, \{-1,1\}$$

No métrico

Métrica esférica
(Espacio elíptico)

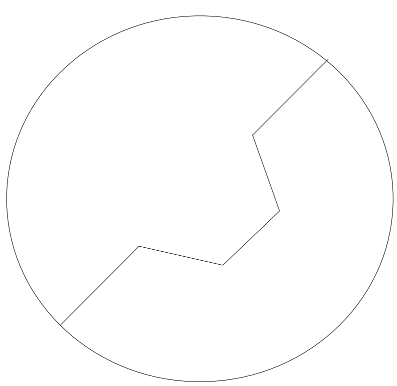
Principios de la Geometría Proyectiva

1. La Geometría Proyectiva es localmente Euclideana
2. La suma de los ángulos en un triángulo es π mas el área.

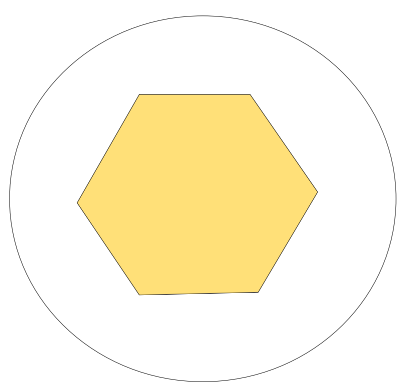
Definición de poliedro proyectivo

- Vértice: Un punto en RP^3
- Arista: Uno de los dos segmentos de linea que une a dos vértices
- n-gono: Un conjunto de n aristas que unen ciclicamente n vértices coplanares
- Cara: Un n-gono que no se auto-intercepta y homotópico a un punto conjuntamente con el disco abierto que el define

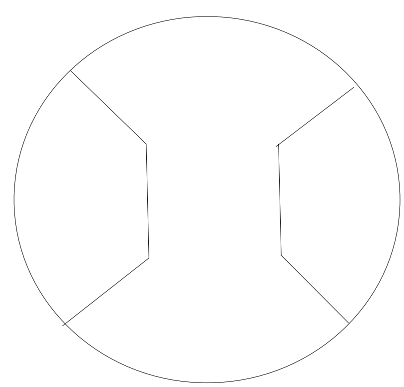
Ejemplos:



No es una cara



Una cara



Otra cara

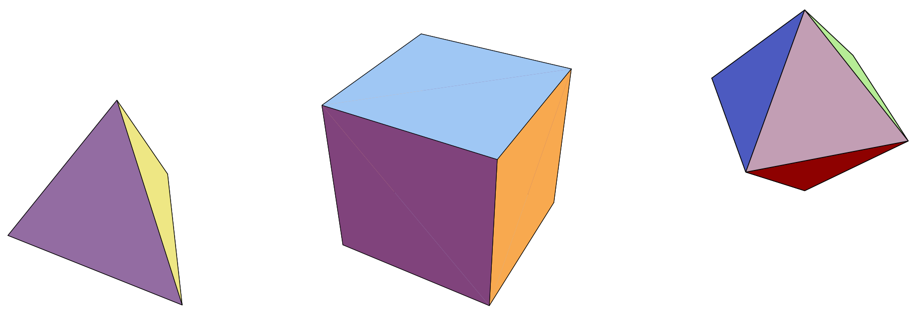
Un *poliedro* en RP^3 es un conjunto de caras que se interceptan en aristas y vértices y que forman una superficie cerrada conexa.

Una *bandera* de un poliedro es un trio (v, a, c) de un vértice v una arista a y una cara c tal que $v \in a \in c$

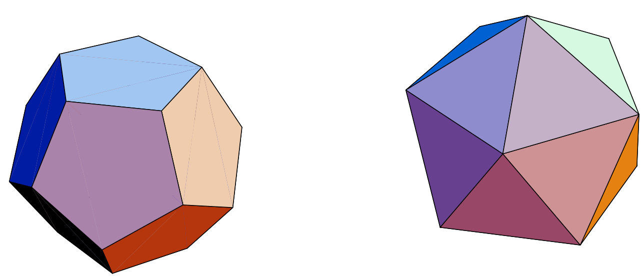
Un poliedro proyectivo es *regular* si el grupo de sus isometrías actua transitivamente en el conjunto de todas sus banderas.

Sea p el número de arístas en una cara y q el número de caras adyacentes a un vértice. El *símbolo de Schläfli* es $\{p, q\}$

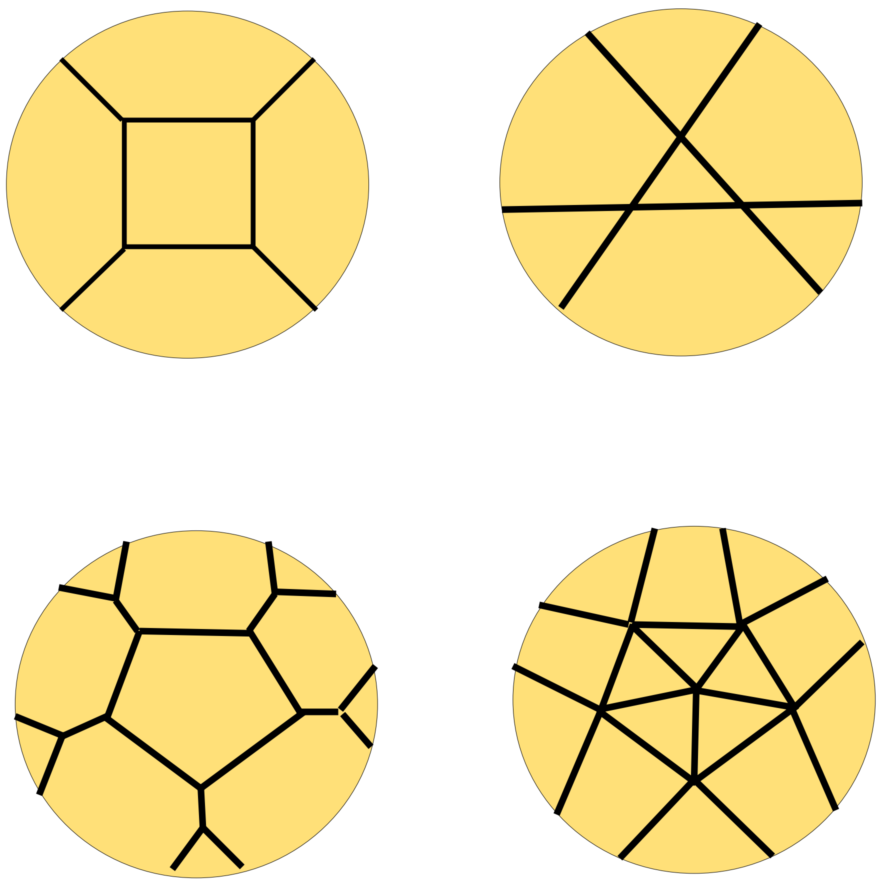
Un poliedro proyectivo regular esférico es uno de los sólidos platónicos:
el tetraedro, el cubo, el octaedro



el dodecaedro y el icosaedro



Un poliedro proyectivo regular plano es la mitad de un sólido platónico con antípodas: medio cubo, medio octaedro, medio dodecaedro y medio icosaedro.



Desde ahora podemos considerar que un poliedro regular proyectivo no es ni plano ni esférico.

Dualidad

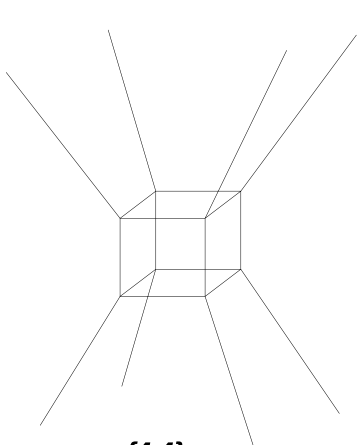
En cualquier poliedro regular proyectivo los centros de las caras adyacentes a un vértice son coplanares.

Por lo tanto para todo poliedro regular proyectivo de tipo $\{p, q\}$ existe otro de tipo $\{q, p\}$ con vértices en los centros de las caras del primero.

El nuevo poliedro se le llama dual del anterior. El dual del dual es el mismo poliedro **(¡¡métricamente!!)**.

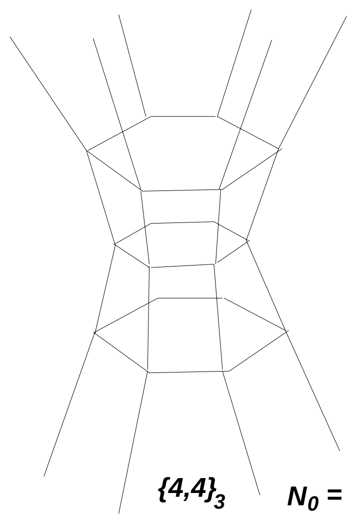
Los grupos de isometrías de dos poliedros duales coinciden.

Los toros torcidos de Coxeter



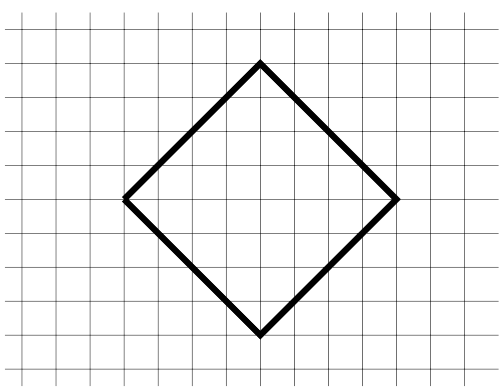
$\{4,4\}_2$

$N_0 = 8$
$N_1 = 16$
$N_2 = 8$



$\{4,4\}_3$

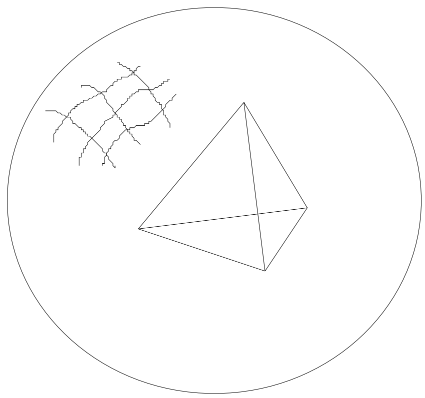
$N_0 = 18$
$N_1 = 36$
$N_2 = 18$



$\{4,4\}$

$N_0 = 2n^2$
$N_1 = 4n^2$
$N_2 = 2n^2$

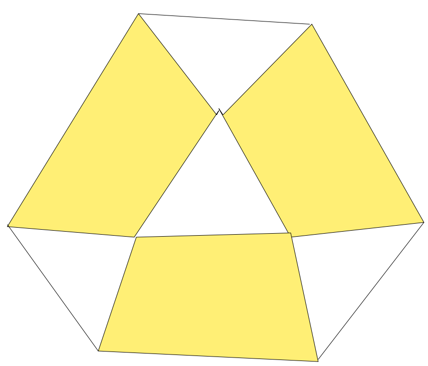
El $\{4,6\}$

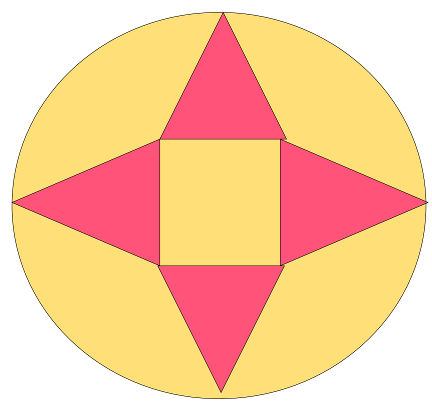


$N_0 = 10$

$N_1 = 30$ **Euler = -5**

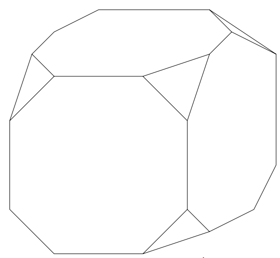
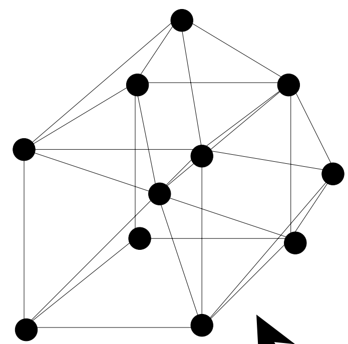
$N_2 = 15$





Definición Combinatoria:

- Vértices: Aristas de K_5
- Caras:4-ciclos en K_5

Se toman 12 cubos truncados y se pegan

por sus triángulos según este esquema

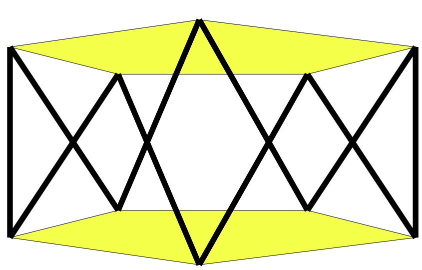
$N_0 = 144 \quad N_1 = 288 \quad N_2 = 72$

Es una superficie orientable de género 35

No hay mas poliedros regulares proyectivos

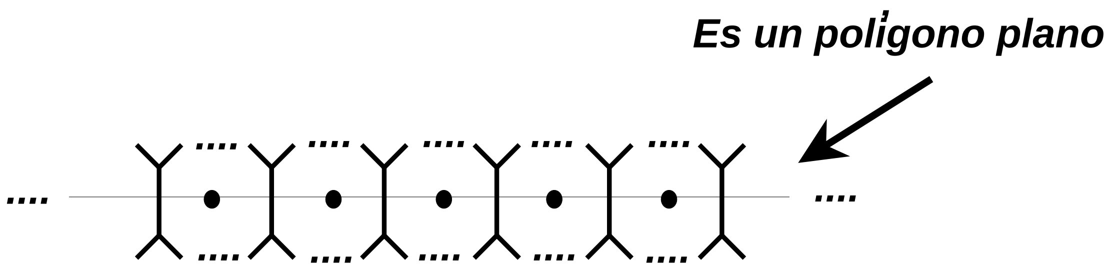
Idea de la demostración:

Por el teorema de Gauss-Bonet existe un vértice con curvatura negativa y por regularidad todos los vértices son similares. Por lo tanto las vecindades de los vértices tienen que ser polígonos regulares torcidos. Luego, q y por dualidad p tienen que ser pares.

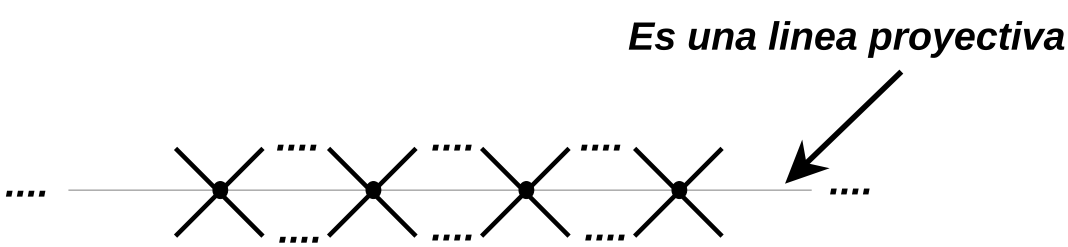


Un decágono torcido

Definición: La cintura de un poliedro regular proyectivo

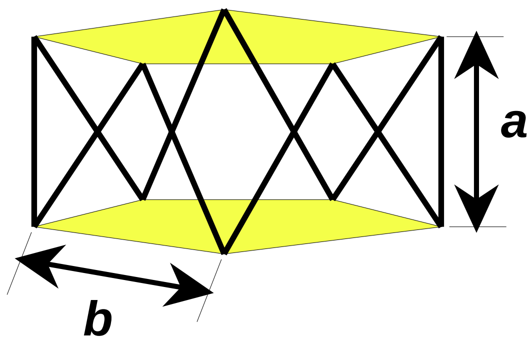


Definición: La diagonal de un poliedro regular proyectivo



Un poliedro regular proyectivo de tipo $\{p, q\}$ está definido salvo isometrías por su cintura o por su diagonal.

Sea γ el ángulo entra caras tenemos:



p grande $\Rightarrow$ a grande $\Rightarrow$ γ pequeño
q grande $\Rightarrow$ b pequeño $\Rightarrow$ γ pequeño
pero $\gamma > \pi/3$ y por lo tanto el tipo de un poliedro regular proyectivo tiene que ser uno de los siguientes:

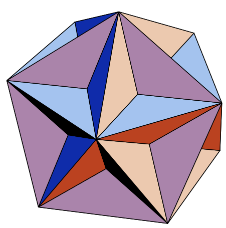
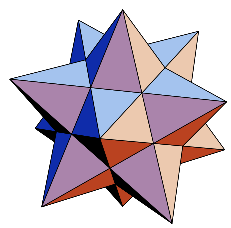
$$\{4,4\}, \{4,6\}, \{6,4\}, \{4,8\}, \{8,4\} \text{ o } \{6,6\}.$$

No hay $\{6,6\}$ aplicando la fórmula de Euler al plano proyectivo definido por una cara.

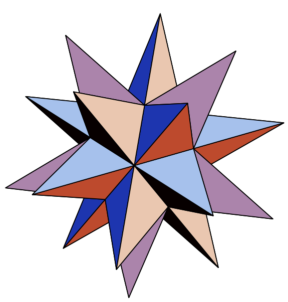
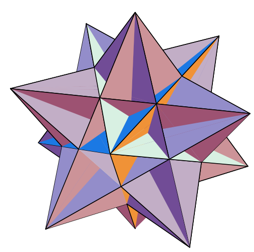
Poliedros Regulares Proyectivos Estrellados

Un poliedro proyectivo regular estrellado finito es uno de los poliedros

de Kepler

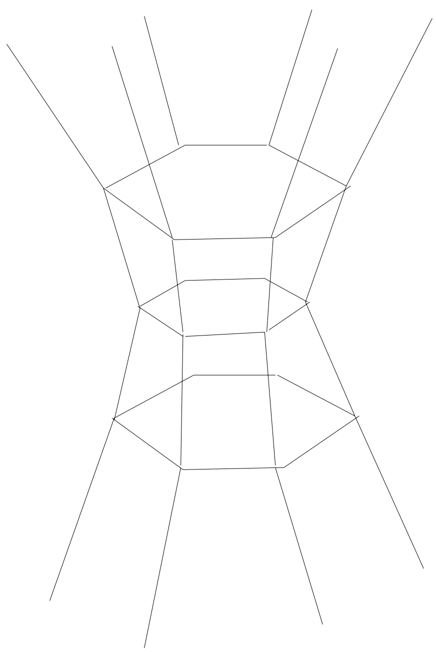
 

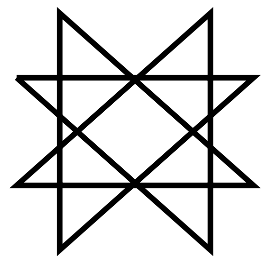
y de Poinsot

Los poliedros estrellados planos son los cocientes de los anteriores.

Hay poliedros estrellados de tipo $\{4,4\}$ con cinturita fraccional





Se demuestra que si la cintura es no esencial entonces

$$\cos \pi/c \cos \pi/p = \sin \pi/q \cos \pi/d$$

y si la cintura es un ciclo esencial entonces

$$\sin \pi/2c = \sin \pi/q \sin \pi/r$$

La existencia de poliedros regulares proyectivos está relacionada con el problema de encontrar todas las soluciones de las ecuaciones anteriores en números racionales.