REVISTA CIENCIAS MATEMÁTICAS Vol.IV, Nº 3, 1983

CONTEO DE RECUBRIMIENTOS MINIMALES NO ISOMORFOS ENTRE SÍ DE UN CONJUNTO FINITO

Jorge Luis Arocha
Instituto Matemática Aplicada y
Ciencia de la Computación. ACC

RESUMEN

En el artículo se resuelve el problema de conteo de los recubrimientos R del conjunto $M=\{1,2,...,m\}$ tales que

$$\forall B \in R \quad , \bigcup_{\substack{A \in R \\ A \neq B}} A \neq M$$

Dos recibimientos R_1 y R_2 se consideran equivalentes si existe una permutación cualquiera α de los elementos M tal que operando con α sobre R_1 se obtiene R_2.

ABSTRACT

In the paper it is solved the problem of counting the covering of the set, $M=\{1,2,..,m\}$ such that

$$\forall B \in R \quad , \bigcup_{\substack{A \in R \\ A \neq B}} A \neq M$$

Two coverings R_1 and R_2 are considered equivalent if it exists a permutation α of the elements of M such operating with α on R_1 it is obtained R_2 .

I. INTRODUCCIÓN

Sea M un conjunto finito y 2^M el conjunto potencia de M. Un recubrimiento R de M es una familia $R \in 2^{2^m}$ de subconjuntos de M tal que

$$\bigcup_{A \in R} A = M$$

A $|R|$ se le denomina grado del recubrimiento. Un recubrimiento se llama minimal si y solo si

$$\forall B \in R \ , \quad \bigcup_{\substack{A \in R \\ A \neq B}} A \neq M$$

Los recubrimientos minimales tienen gran importancia para la matemática discreta en general, fundamentalmente porque en muchos problemas de optimización discreta la solución se encuentra entre los recubrimientos minimales de un conjunto. Por esto las soluciones de los problemas de conteo de estos recubrimientos, ofrecen en muchos casos evaluaciones de la complejidad de algoritmos de optimización discreta.

El problema del conteo de los recubrimientos en general es clásico y se resuelve evidentemente: el número de recubrimientos de grado n es igual a

$$(2^n - 1)^{|M|}/n!$$

En el caso de los recubrimientos minimales fue resuelto en [1]. El resultado de Shirokof y Signaevsky es el siguiente: el número de recubrimiento minimales de grado n es igual a

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=o}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(2^n - 1 - K)^m$$

Estos problemas son de tipo de conteo de objetos marcados, esto es cuando se diferencian por ejemplo los recubrimientos

$R_1 = \{\{a,b\},\{b,c\}\}$ y $R_2 = \{\{a,c\},\{b,c\}\}$ del conjunto $\{a,b,c\}$. El caso más difícil cuando $R_1 = R_2$ es el que se resuelve en este trabajo.

Planteamos el problema rigurosamente. Sean A y B dos conjuntos finitos y G_A, G_B dos grupos de permutaciones que operan en A y B respectivamente. El grupo potencia denotado por $G_B^{G_A}$ opera en el conjunto B^A de todas las funciones de A en B. Las permutaciones del grupo $G_B^{G_A}$ son todos los pares ordenados (α,β) donde $\alpha \in A$ y $\beta \in B$. La imagen de una función $f \in B^A$ cuando sobre ella opera la permutación (α,β) se define por la fórmula

$$\forall x \in A,\ ((\alpha,\beta)f)(x) = \beta(f(\alpha(x)))$$

Sean E_n y S_n los grupos unitario y simétrico respectivamente de grado n. En el conjunto 2^{2^M}

de todas las familias de subconjuntos de $M, |M| = m$ naturalmente opera el grupo potencia $E_2^{E_2^{S_m}}$.

Dos recubrimientos se llaman isomorfos si y solo si existe una permutación de $E_2^{E_2^{S'_m}}$ que transforma uno al otro. El problema que nos planteamos es el siguiente: hallar el número $T_{m,n}$ de órbitas generadas por $E_2^{E_2^{S_m}}$ en el conjunto de todos los recubrimientos de orden n del conjunto $M, |M| = m$.

II. *Desarrollo*

Advertiremos que en este trabajo consideramos que el lector conoce la teoría de Polya para el conteo de objetos no isomorfos. Otra posibilidad no existe ya que la explicación de esta alargaría inaceptablemente este trabajo. Además del original [2], esta teoría se expone en muchos anuales y monografías de teoría combinatoria. El trabajo más completo en este campo es [3] .

Sea

$$Z_n^*(x_i, Y_i, Z_i) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{K_1+2K_2+\dots+nK_n=n} \frac{n!}{K_1!K_2!\dots K_n!} x_1 \prod_{i=1}^{2^n} \left(\frac{Y_i}{i!}\right) K_i \, Z_i^{ji}$$

donde $J'_1 = J_1 - K_1 - 1$, $J'_i = J_i - K_i$ para $i \geqslant 1$

$$j_i = \frac{1}{i} \sum_{s|i} \mu(\frac{i}{s})\ 2^{\sum_{\ell=1}^{n} mCD(\ell,s)k^{\ell}}$$

y $\mu(n)$ es la función teórico-numérica de Möbius definida por la expresión

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n=1 \\ (-1)^k, & \text{si n es el producto de k diferentes números primos} \\ 0, & \text{si el cuadrado de un número primo divide a n} \end{cases}$$

Teorema: Para la función generadora del número de recubrimiento minimales no isomorfos de grado n del conjunto $M(|M|=n)$ es válida la fórmula

$$\sum_{m \geq 0} T_{m,n} x^m = Z_n^*\left(1, \frac{x^i}{1-x^i}, \frac{1}{1-x^i}\right)$$

Demostración: Sea $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ una familia de subconjuntos del conjunto $M=\{1,\ldots,m\}$. La matriz de incidencia $\psi(A)$ se define como

$$\psi(A) = \|\psi_{ij}\|, \psi_{ij} = \begin{cases} 1 & i \quad A_j \\ 0 & j \quad A_j \end{cases}$$

Si B_1 y B_2 son dos familias de subconjuntos M y $\psi(B_1)$, $\psi(b_2)$ sus matrices de incidencia, en entonces evidentemente estas familias serán iso morfas sí y sólo sí existe una permutación de filas y una permutación de columnas que transforman una matriz en otra.

Definamos el vector $\vec{K}_{2^n}$, donde K_i es el número de columnas de una matriz de incidencia que coinciden con la representación binaria en n bit del número i.

El grupo simétrico de todas las permutaciones de filas naturalmente induce al grupo $E_2^{S_n}$ sobre el conjunto de todos los símbolos $K_0, K_1, \ldots, K_{2^n-1}$

Veamos las funciones

$$f: \{K_0, K_1, \ldots, K_{2^n-1}\} \rightarrow \{0,1,\ldots\}^{2^n} \qquad (1)$$

tales que

$$f(K_0) + f(K_1) + \ldots + f(K_{2^n-1}) = m$$

Salvo permutaciones de filas a estas funciones le corresponde biunívocamente las matrices de incidencia de las familias de subconjuntos de M que contienen a n subconjuntos. Por esto las familias no isomorfas le corresponden las órbitas del grupo inducido por el grupo $E_2^{S_n}$ sobre el conjunto de funciones (1).

órbitas del grupo inducido por el grupo $E_2^{S_n}$ sobre el conjunto (1).

Sea $K_{m,n}(\vec{a}_2 n)$ el cardinal de la órbita que contiene la función $f(\vec{K}_2 n) = \vec{a}_2 n$. Entonces evidentemente, el número de familias no isomorfas es igual a

$$\sum_{K_0+K_1+\ldots+K_{2^n-1}=m} \frac{1}{K_{m,n}(\vec{K}_{2^n})}$$

Además de ésto, si $\mathcal{P}(\vec{K}_{2^n})$ es un predicado que define un problema de conteo de familias marcadas, entonces la fórmula para el número de familias no isomorfas que cumplen con $\mathcal{P}(\vec{K}_{2^n})$ es igual a

$$\sum_{\substack{K_0+K_1+\ldots+K_{2^n-1}=m \\ \mathcal{P}(\vec{K}_{2^n})=1}} \frac{1}{K_{m,n}(\vec{K}_{2^n})}$$

La matriz de incidencia de un recubrimiento minimal no debe obtener columnas formadas por ceros solamente y además debe contener por lo menos una de cada tipo de las siguientes columnas

0000 ... 1
....
0001 ... 0
0010 ... 0
0100 ... 0
1000 ... 0

Por lo tanto el predicado $\mathcal{P}(\vec{K}_{2^n})$ en nuestro caso es $K_0=0 \wedge (K_i \geq 1, \rho(i)=1)$ y por ésto

$$T_{m,n} = \Sigma \frac{1}{K_{m,n}(\vec{K}_{2n})} \qquad (2)$$

$$K_1 + K_2 + \ldots + K_{2n-1} = m$$

$$K_i \geqslant 1, \rho(i) = 1$$

Para hallar (2) es necesario hallar el índice cíclico del grupo $E_2^{S_n}$. El primero en calcular este índice fue Harrison [4]. Nosotros usaremos la técnica de Harary y Palmer [5]. De las fórmulas 6.1.1 - 6.1.3 de [6] para el índice cíclico del grupo potencia obtendremos:

$$Z(E_2^{S_n}) = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in S_n} \prod_{k=1}^{2^n} x_k^{j_k(\alpha)} \qquad (3)$$

$$j_n(\alpha) = \frac{1}{k} \sum_{S|K} \mu\left(\frac{k}{S}\right) 2^{\sum_{\ell=1}^{n} i_\ell(\alpha^S)}, \qquad (4)$$

donde $i_n(\alpha^S)$ es el número de ciclos de longitud K de la permutación $\alpha^S = \alpha.\alpha\ldots\alpha$.

De (3) y (4) tenemos

$$Z(E_2^{S_n}) = \frac{1}{n!} \sum_{i_1+2i_2+\ldots+n i_n = n} \frac{n!}{i_1!\ldots i_n!} \prod_{k=1}^{2^n} (K!)^{-i_k} x_k^{j_n} \qquad (5)$$

$$j_n = \frac{1}{k} \sum_{S|K} \mu\left(\frac{K}{S}\right) 2^{\sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{mcd}(\ell,s) i_\ell} \tag{6}$$

La fórmula (6) implica de (4) y de que si el aporte de la permutación α en el índice cíclico $Z(S_n)$ es $\prod_{k=1}^{n} x_k^{i_k(\alpha)}$ entonces el aporte de la permutación α^s en $Z(E_2^{S_n})$ es (veáse [6])

$$\prod_{k=1}^{n} X_{K/\mathrm{mcd}(K,S)}^{\mathrm{mcd}(K,S)\, i_n(\alpha)}$$

El conjunto de símbolos $\{K_0, K_1, \ldots, K_{2^n-1}\}$ lo descomponemos en tres clases $\{K_0\}$, $\{K_i, \rho(i)=1\}$ $\{K_i, \rho(i) \geq 2\}$, donde $\rho(i)$ es la cantidad de unos en la representación binaria del número i. Cada uno de los símbolos de estas clases no se transforma por ninguna permutación del grupo $E_2^{S_n}$ en otro símbolo de otra clase $\{K_0\}$ y $\{K_i, \rho(i) \geq 1\}$ genera los grupos E_1 y S_n respectivamente.

Esto junto con (5) da el índice cíclico 1.29 de [2] igual a

$$Z_n^*(s_i, u_i, v_i) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{i_1 + 2i_2 + \ldots + n i_n = n} \frac{n!}{i_1! \ldots i_n!} s_1 \prod_{k=1}^{2^n} (K!)^{-i_k} U_k^{i_n} V_n^{j'_k}$$

donde

$$j'_n = j_n - i_n,\ K > 1;\ j'_1 = j_1 - i_1 - 1$$

y j se define por la fórmula (6).

Para los recubrimientos minimales $K_0 = 0$, $K_i \in \{1,2,\dots\}$ cuando $\rho(i)=1$ y $K_i \in \{0,1,\dots\}$ cuando $\rho(i) > 1$. Por esto las funciones generadoras para las figuras serán 1, $\frac{x}{1-x}$ y $\frac{1}{1-x}$ respectivamente. Por esto teniendo en cuenta (7) en virtud del teorema de Polya [2] queda demostrado el teorema.

III. *Conclusiones*

Señalemos que en primer lugar la demostración de este teorema es bastante general en el sentido que tal esquema es aplicable no solo al problema del conteo de recubrimientos minimales no isomorfos, sino es válida su utilización en una serie de problemas de conteo de familias de subconjuntos no isomorfas con respecto a un grupo de permutaciones (veáse [7]). Así por ejemplo, con esta técnica se puede obtener el resultado ya muy conocido de que el número de particiones no isomorfas de un conjunto finito es igual al número de soluciones no ordenadas de la ecuación de Diofanto $K_1 + K_2 + \dots + K_m = m$.

En segundo lugar queremos notar que la complejidad de las fórmulas que se manejan arriba es producto de la complejidad del problema que se resuelve. Por otro lado el teorema 1 no es nada más que la solución en principio de este problema. A partir de éste se pueden obtener fórmulas más cómodas para su manejo. Por ejemplo, es válido [7] el siguiente teorema que enlaza el número de recubrimientos minimales no isomorfos con el número de clases de funciones de Boole:

Teorema 2

$$T_{m,n}x^n = x^n(1-X)\ Z\ (E^{S_n},\ \frac{1}{1-x^i}).$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Shirokof, F.V., V.A.Signaevsky.:
   Minimalnie pokritia konechnogo mnoshestba DAN SSSR, 1972, 207, #5, 1066.

2. Polya, G.:
   Kombinatorische anzahlbestimmungen für, gruppen, graphen und chemische verbindungen, Acta Math., 68(1937), 145-254.

3. De Brujn, N.G.:
   A suvxey of generalizations of Polya enumeration theorem, Nieuw Archief voor Wiskunde (2), 19 (1971), 89-112.

4. Harrison, M.A.:
   The number of transitive set if Boolean functions, J.Soc. Ind. Apl. Math., 1963, 11, 808-828.

5. Harary, F., E.M. Palmer.:
   The power group enumeration theorem, J.Comb. Theory, 1 (1966), 853-860.

6. Harary, F., E.M. Palmer.:
   Graphical Enumeration, Academic Press, 1973.

7. Arocha, J.:
Disertatsia k.f.m.n., Minsk, 1981.

Recibido: 4 de enero de 1983.