ACERCA DE LOS CONJUNTOS DE NATURALES QUE NO CONTIENEN PROGRESIONES ARITMETICAS

Jorge L. Arocha

El problema 6.

La motivación de este trabajo es el problema 6 de la III-ra Olimpiada Iberoamericana de Matemática (Lima, 1988) que es el siguiente (vease [1]):

- Considere los conjuntos de n números naturales diferentes de cero en los cuales no hay tres elementos en progresión aritmética. Demuestre que en uno de esos conjuntos la suma de los inversos de sus elementos es máxima.

Veamos la siguiente demostración. Sea $\mathbb{N}$ los naturales sin el cero y $f(x)=1/x$. Sea $\mathbb{A}_k$, $k\in\{1,2,\dots\}$ el conjunto de subconjuntos A de n naturales diferentes de cero tales que

$$\sum_{a\in A} f(a) \geq \sum_{i=k}^{n-k+1} f(i)$$

Cada $\mathbb{A}_k$ es finito por ser la función f decreciente y se tiene que $\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathbb{A}_k$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ de cardinal n.

Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que no tienen PA3 (progresión aritmética de longitud 3) con n elementos. El conjunto $\mathbb{H}$ no es vacío como lo muestra el ejemplo de la progresión geométrica. Luego, para cierto k se tiene que $\mathbb{A}_k\cap \mathbb{H} \neq \emptyset$ y como $\mathbb{A}_k$ es finito, en el se alcanza el máximo buscado.

L.Q.Q.D.

Como se puede observar por la prueba anterior en realidad hemos demostrado lo siguiente:

- Considerese un conjunto $\mathbb{H}$ no vacío de conjuntos de n números naturales diferentes de cero. Sea $f(x)$ una función decreciente. Demuestre que en uno de los conjuntos de $\mathbb{H}$ la suma de las imágenes por f de sus elementos es máxima.

Así vemos que ni la función $1/x$ ni la propiedad de no tener PA3 son significativas para el problema. Lo mismo sería poner, por ejemplo, la función $1/\log x$ y la propiedad de que la suma de sus elmementos no sea un número primo.

Sin embargo, lo interesante en este problema, como se verá mas adelante, es precisamente la interrelación entre la función $1/x$ y la propiedad de no contener PA3.

Un poco de historia

En 1928 van der Waerden [2] publicó el siguiente extraordinario Teorema

Sea $\{B_1, B_2, ..., B_k\}$ una partición arbitraria del conjunto de los numeros naturales $\mathbb{N}$. Entonces al menos uno de los conjuntos B_i contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

O sea

$\forall \{B_1, B_2, ..., B_k\}$ *tal que* $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \mathbb{N}$ y $B_i \cap B_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$

$\exists\ l$ *tal que* $\forall\ m \in \mathbb{N}$ *en* B_l *hay una progresión aritmética de longitud* m.

Observese la diferencia entre que un conjunto contiene una progresión aritmética infinita y que contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

La demostración de este teorema es muy ingeniosa y completamente elemental (no utiliza matemática superior) por lo que podria ser un terreno fértil para el desarrollo de nuestros jóvenes con inclinaciones a la matemática. Especialmente recomendamos el articulo [3] en el cual el propio van der Waerden hace un relato de como Emil Artin, Otto Schreier y el descubrieron la demostración del teorema.

El teorema de van der Waerden habla de la existencia de una clase con progresiones aritméticas arbitrariamente largas pero no dice cual de ellas debe ser aquella que cumpla esta propiedad. Intuitivamente aquella clase que tenga "mas números" debe ser aquella que cumpla la propiedad. Asi, en 1936 Erdös y Turan [4] propusieron la hipótesis que si un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tiene densidad superior positiva o sea si

$$\limsup_{n\to\infty} |A \cap [1,n]|/n > 0 \qquad (*)$$

entonces A tiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

En 1953 Roth [5] con métodos analíticos de la teoría de números demostró que de (*) implica la existencia en A de PA3 lo que fué superado en 1969 por Szemerédi [6] al demostrar la existencia de PA4. Finalmente en 1975 el propio Szemerédi [7] con razonamientos combinatorios en un trabajo de 45 paginas demostró completamente la hipótesis.

Sea $r_p(n)$ el número natural mas grande tal que hay un conjunto $A \subseteq [1,n]$ de cardinal $r_p(n)$ que no tiene PAp (progresiones aritméticas de longitud p). En realidad lo que prueba Szemerédi en [7] es que $\lim_{n\to\infty} r_p(n)/n = 0$. De aquí implica (*).

En 1987 recibimos una carta de Erdös en la cual nos comunicó que Szemerédi demostró que $r_3(n) < n/(\log n)^{1/8}$. De esto se deduce que $\left[\sum_{a\in A} 1/a = \infty\right] \Rightarrow \left[A \text{ tiene PA3}\right]$ lo cual es un paso en la demostración de la siguiente hipótesis de Erdös:

$$\left[\sum_{a\in A} 1/a = \infty\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} A \text{ tiene progresiones} \\ \text{aritméticas arbitrariamente largas} \end{array}\right]$$

Por demostrar o refutar esta hipótesis Erdös ofrece 3000 dolares.

¡¡De la validez de esta hipótesis se deduciría que hay progresiones aritméticas arbitrariamente largas de números primos !!

No sabemos que caminos se recorrieron para que apareciera el problema de marras en la mencionada olimpiada, lo que no nos cabe la menor duda es que la fuente original del mismo es esta hipótesis.

La prueba del jurado.

Introduscamos la notación $A=\{a,b,\ldots,c\}_<$ para representar que en el conjunto A se cumple que $a<b<\ldots<c$.

La solución al problema 6 propuesta por el jurado (vease [1]) pretende demostrar que para cualquier conjunto $\{b_1,\ldots,b_n\}_<$ sin PA3 hay otro $\{c_1,\ldots,c_n\}_<$ sin PA3 con $c_n\leq 2^{n-1}$ y tal que

$$\sum_{i=1}^{n} 1/c_i \geq \sum_{i=1}^{n} 1/b_i .$$

Hecho esto, como el conjunto de los posibles $\{c_1,\ldots,c_n\}_<$ con $c_n\leq 2^{n-1}$ es finito, se deduce obviamente que el máximo se alcanza.

Observemos como se hace esta demostración (vease [1]). Sea $B=\{b_1,\ldots,b_n\}_<$. Si $b_n>2^{n-1}$ se toma $B_1=B \setminus\{b_n\}\cup\{2^{k-1}\}$ siendo k el mas grande natural tal que $k\leq n$ y $2^{k-1}\notin B$. Si $b_{n-1}>2^{n-1}$ y B_1 es sin PA3 el proceso termina. En caso contrario tomamos $B_2=$ $=B_1\setminus\{b_{n-1}\}\cup\{2^{k-1}\}$ con k el máximo $k\leq n$ y $2^{k-1}\notin B_2$, etc. Con eso se llega a B_s sin PA3 y con elementos menores que 2^{n-1}.

Para el jurado aquí la prueba termina. Tal parece que para el mismo es obvio que en cada paso (de B_i a B_{i+1}) se sustituye un elemento de B_i por uno no mayor que el. Esto en realidad no es tan trivial. Para que se vea mas claro la dificultad supongamos que $b_1<b_2<\ldots<b_i<2^{n-1}<b_{i+1}<\ldots<b_n$, entonces despues de haber realizado los pasos necesarios obtendremos un cierto $B_p=\{b_1,b_2,\ldots,b_i,2^{k_{i+1}-1},2^{k_{i+2}-1},\ldots,2^{k_n-1}\}$ con $b_n>b_{n-1}>\ldots>b_{i+1}>2^{n-1}>2^{k_n-1}>2^{k_{n-1}-1}>\ldots>2^{k_{i+1}-1}$ y hasta aquí todo está claro. Si B_p no tiene PA3 no hay problema pero si tiene ¿como asegurar que el próximo 2^{k_i-1} no es mayor que b_i?

He aquí una forma de completar la demostración. Supongamos que $1\leq b_1<b_2<\ldots<b_i<2^{k_i-1}$. Como B_p tiene PA3 y B no, necesariamente para cierto $x\in B_p$ existen k_j, $j\in\{i+1,\ldots,n\}$ y b_l, $l\in\{1,\ldots,i\}$ tales que $x=(2^{k_j-1}+b_l)/2$ y entonces

$$x=(2^{k_j-1}+b_l)/2 \geq (2^{k_j-1}+2)/2 = 2^{k_j-2}+1 \geq 2^{k_i-1}+1 > 2^{k_i-1}$$

luego para cierto r, $i+1<r<j$ se tiene $x=2^{k_r-1}$ y por lo tanto $x=(2^{k_j-1}+b_l)/2=2^{k_r-1} \Rightarrow b_l=2^{k_r}-2^{k_j-1}\leq 0$, lo que es un absurdo.

L.Q.Q.D.

La solucion de Jorge L. de Armas.

La esencia de esta solución (vease [1]) es la siguiente. Sea

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 = 1 & \\ a_{k+1} = & \text{el menor número natural que no forma PA3 con} \\ & \text{ninguno de los } a_1,a_2,\ldots,a_k \text{ ya construidos} \\ & \text{anteriormente} \end{array}\right\} \quad (**)$$

Se afirma que el máximo buscado se alcanza en $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Sea $\{b_1,\ldots,b_n\}_<$ sin PA3 entonces por la construcción (**) se tendrá $a_i\leq b_i$ para $i\in\{1,\ldots,n\}$ y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} 1/a_i \geq \sum_{i=1}^{n} 1/b_i .$$

En realidad ~~Por desgracia~~ lo afirmado en la desigualdad $a_i\leq b_i$ no es cierto ~~es falso~~ por lo que la prueba no es correcta. Esto se puede ver con el siguiente contraejemplo. La sucesion (a_i) es 1,2,4,5,10,11,14,... sin embargo el conjunto {1,2,4,8,9} no tiene PA3 y $a_5>9$.

En lo adelante conservaremos la notación (a_i) para la sucesión definida por (**) y la llamaremos sucesión ávida.

La sucesión ávida.

¿ Como describir mejor la sucesión ávida ?

El problema 5 de la IV Olimpiada Iberoamericana de Matemática (La Habana, Abril 1989) fué el siguiente.

- Halle el conjunto imagen de la funcion definida en $\mathbb{N}$ por las fórmulas $f(1)=1$, $f(2k+1)=f(2k)+1$, $f(2k)=3k$.

Una solución standart del mismo es la siguiente. Cada número natural n se puede expresar como suma de potencias de 2 con exponentes distintos o sea $n=2^{n_1}+2^{n_2}+...+2^{n_k}$ con $n_1<n_1<...<n_k$. De aquí $f(n) = f(2^{n_1}+2^{n_2}+...+2^{n_k}) = 3^{n_1}f(1+2^{n_2-n_1}+...+2^{n_k-n_1}) = 3^{n_1}+f(2^{n_2}+...+2^{n_k}) = ... = 3^{n_1}+3^{n_2}+...+3^{n_k}$. Luego el conjunto imágen $\mathbb{G}$ es el conjunto de los elementos de $\mathbb{N}$ expresables como suma de potencias de 3 con exponentes distintos.

Si X es un conjunto de naturales y k un natural por $X+k$ se denotará el conjunto $\{x+k : x\in X\}$. Sea $\mathbb{G}_o = \mathbb{G} \cup \{0\}$. Veamos el siguiente hecho ya conocido hace muchos años.

Proposición. *El conjunto de los elementos de la sucesión ávida es* $\mathbb{G}_o+1$.

Prueba. Sean $x=1+\sum_{i=0}^{q} \alpha_i 3^i$, $y=1+\sum_{i=0}^{q} \beta_i 3^i$ dos elementos de $\mathbb{G}_o+1$ o sea $\alpha_i,\beta_i\in\{0,1\}$. entonces $(x+y)/2=1+\sum_{i=0}^{q} \frac{\alpha_i+\beta_i}{2} 3^i$. Luego $(x+y)/2 \in \mathbb{G}_o+1$ si y solo si $x=y$ por lo que $\mathbb{G}_o+1$ no tiene PA3. Sea

A el conjunto de los elementos de la sucesión ávida. Si $x \notin A$ entonces por definición de A el conjunto $A \cup \{x\}$ tiene PA3. Luego si se logra demostrar que $A \subseteq \mathbb{G}_o+1$ tendremos $A = \mathbb{G}_o+1$.

Al absurdo sea a_k el menor elemento de A que no está en $\mathbb{G}_o+1$. Entonces $a_k = 1 + \sum_{i=0}^{q} \gamma_i\ 3^i$ con $\gamma_i \in \{0,1,2\}$ y donde ciertos γ_i son iguales a 2. Pongamos

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \gamma_i & \text{si } \gamma_i < 2 \\ 0 & \text{si } \gamma_i = 2 \end{cases} \qquad\qquad \delta_i = \begin{cases} \gamma_i & \text{si } \gamma_i < 2 \\ 1 & \text{si } \gamma_i = 2 \end{cases}$$

$$c = 1 + \sum_{i=0}^{q} \varepsilon_i\ 3^i \qquad\qquad d = 1 + \sum_{i=0}^{q} \delta_i\ 3^i$$

Los números c y d son diferentes, están en $\mathbb{G}_o+1$ y son menores que a_k por lo que tambien estan en A . Pero $c + a_k = 2d$ lo que contradice que A no tiene PA3.

L.Q.Q.D.

<u>Conclusiones</u>

De la proposición anterior se deduce que $a_{2^n} = \dfrac{3^n + 1}{2}$ por lo que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i$ converge.

Nosotros no podemos afirmar ni contradecir la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} 1/a_i \geq \sum_{i=1}^{n} 1/b_i$$

de la prueba de J.L. de Armas.

Sería muy ~~bonito~~ interesante que esto fuera cierto porque de aquí implicaría que si $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ no tiene PA3 entonces $\sum_{i=1}^{\infty} 1/b_i$ converge y haciendo un estudio análogo para los conjuntos que no tienen PAp ($p \in \{3,4,\ldots\}$) se podría intentar demostrar la hipótesis de Erdös $\left[\sum_{a\in A} 1/a = \infty\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} A \text{ tiene progresiones} \\ \text{aritméticas arbitrariamentelargas} \end{array}\right]$.

~~Pero no todo lo bonito es cierto.~~

Bibliografia.

[1] Reguera R. , Santibañez M.E. : *Participación de Cuba en la III Olimpiada Iberoamericana de Matemática.* Boletin de la Sociedad Cubana de Matemática. 10 (1989), pag. 33-45.

[2] van der Waerden B.L. : *Beweis einer Baudetschen Vermutung.* Nieuw Arch. Wisk. 15 (1927), pp. 212-216.

[3] van der Waerden B.L. : *How the proof of Baudet's conjecture was found.* Studies in Pure Mathematics (L.Mirsky,ed.) Academic Press, London, 1971, pp. 251-260.

[4] Erdös P., Turan P. : *On some sequences of integers.* J.London Math. Soc. 11 (1936), pp. 261-264.

[5] Roth K.F. : *On certain sets of integers* . J. London Math. Soc. 28 (1953) pp. 104-109.

[6] Szemerédi E. : *On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 20 (1969), pp. 89-104.

[7] Szemerédi E. : *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression.* Acta Arith. 27 (1975), pp. 199-245