УДК 621-501

Х. Л. АРОЧА

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ ПУТЕМ ИССЛЕДОВАНИЯ НИЖНИХ ЕДИНИЦ И ВЕРХНИХ НУЛЕЙ

В настоящей работе доказываются некоторые утверждения, раскрывающие связь между нижними единицами, верхними нулями, минимальными (МДНФ) и кратчайшими дизъюнктивными нормальными формами (КДНФ) функции алгебры логики (ФАЛ). Полученные результаты могут быть использованы для решения задачи минимизации монотонных ФАЛ и для понижения перебора в случае минимизации произвольной ФАЛ.

Введем необходимые определения. Пусть F некоторая ФАЛ от n аргументов задана множествами M_0 и M_1 вершин n-мерного единичного куба B^n, где F принимает значение 0 и 1 соответственно. Заметим, что мы оперируем в общем случае частичными ФАЛ, а всюду определенные рассматриваются как частный случай, когда $M_0 \cup M_1 = B^n$. Поэтому в тех утверждениях, которые справедливы только для всюду определенных ФАЛ, будем обозначать функцию символом f. В тех же утверждениях, которые справедливы для любой частичной ФАЛ, будет использоваться символ F.

Обозначим $M_F = M_0 \cup M_1$. Понятия «нижняя единица» и «верхний нуль», примененные в [1, 2] при исследовании монотонных функций, предлагается использовать для исследования произвольных функций.

Вершина $\tilde{\alpha}$ называется нижней единицей (верхним нулем) функции F, если $F(\tilde{\alpha}) = 1$ $(F(\tilde{\alpha}) = 0)$ и для любой $\tilde{\beta} \in M_F$ из того, что $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$ $(\tilde{\beta} > \tilde{\alpha})$ следует, что $F(\tilde{\beta}) = 0$ $(F(\tilde{\beta}) = 1)$. Обозначим через B_F (A_F) множество всех нижних единиц (верхних нулей) функции F.

Функция F называется монотонной, если для любых вершин $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, принадлежащих M_F, из того, что $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, следует, что $F(\tilde{\alpha}) \leqslant F(\tilde{\beta})$.

Легко проверить, что функция монотонна, тогда и только тогда, когда любая ее нижняя единица не меньше любого ее верхнего нуля.

Будем говорить, что элементарная конъюнкция $K_{\tilde{\beta}}$ соответствует вершине $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если $\beta_i = 1$ тогда и только тогда, когда x_i входит в $K_{\tilde{\beta}}$.

Лемма. Если $\tilde{\beta} \in B_F$ и для любого $\tilde{\alpha} \in A_F$, $\tilde{\beta}$ не меньше, чем $\tilde{\alpha}$, то $K_{\tilde{\beta}}$ импликанта функции F.

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину $\tilde{\gamma}$, для которой $K_{\tilde{\beta}}(\tilde{\gamma}) = 1$, тогда $\tilde{\gamma} \geqslant \tilde{\beta}$. Предположим $F(\tilde{\gamma}) = 0$, тогда существует $\tilde{\alpha} \in A_F$, что $\tilde{\alpha} \geqslant \tilde{\gamma}$ и, следовательно, $\tilde{\alpha} \geqslant \tilde{\beta}$, что противоречит условиям леммы.

Теорема. Если $\tilde{\beta} \subset B_f$ и для любого $\tilde{\alpha} \in A_f$, $\tilde{\beta}$ не меньше, чем $\tilde{\alpha}$, то $K_{\tilde{\beta}}$ входит в любую МДНФ и хотя бы в одну КДНФ всюду определенной функции f.

Доказательство. По лемме $K_{\tilde{\beta}}$ — импликанта f и, следовательно, чтобы доказать теорему, достаточно (см. [3], с. 72), что нет таких слагаемых в сокращенной дизъюнктивной нормальной форме (C_KДНФ) функции f, отличных от $K_{\tilde{\beta}}$ таких, что

$$\bigvee_{i=1}^{R} K_i \to K_{\tilde{\beta}},\ R \geqslant 1.$$

Предположим противное, т. е. такие слагаемые существуют. Тогда, если удалить все буквы, входящие в $K_{\tilde{\beta}}$, по критерию поглощения ([3], с. 78) должно выполняться условие

$$\bigvee_{i=1}^{R} K_i'' \equiv 1$$

и поэтому существует индекс $j \in \{1, 2, \ldots, R\}$, что $K_j''(\tilde{0}) = 1$. Заметим, что в K_j'' не могут содержаться переменные без отрицания и, следовательно, если x_i входит в K_j, то она должна входить и в $K_{\tilde{\beta}}$.

Рассмотрим вершину $\tilde{\alpha}$ такую, что $K_{\tilde{\alpha}} = K_j'$ $(K_j = K_j' \wedge K_j'')$. Очевидно, $K_j(\tilde{\alpha}) = 1$ и, следовательно, $f(\tilde{\alpha}) = 1$. С другой стороны, в силу свойств K_j, $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$. Кроме того, $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\beta}$, ибо, если бы $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$, то $K_{\tilde{\beta}}$ являлся бы частью K_j и, следовательно, K_j не было бы простым импликантом. Мы доказали, что $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha}) = 1$, а это противоречит тому, что $\tilde{\beta}$ нижняя единица. Теорема доказана.

Следствие. Если всюду определенная функция f монотонна, то формула

$$\bigvee_{\tilde{\beta} \in B_f} K_{\tilde{\beta}}$$

является МДНФ и КДНФ функции f.

Справедливость этого утверждения следует из теоремы и из факта, что для всюду определенных монотонных ФАЛ, МДНФ, КДНФ, $C_{\dot{K}}$ДНФ единственны и совпадают.

Пример 1. Рассмотрим функцию f_1, заданную множествами $M_1 = \{111, 011, 101, 110\}$ и $M_0 = B^n \setminus M_1$. Функция f_1 всюду определена, монотонна и $B_{f_1} = \{011, 101, 110\}$. Тогда в силу следствия

$$x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$$

является МДНФ и КДНФ функции f_1.

Пример 2. Рассмотрим функцию f_2, заданную множествами $M_1 = \{010, 101, 110, 111\}$ и $M_0 = M_1 \setminus B^n$. Соответствующие множества нижних единиц и верхних нулей следующие: $B_{f_2} = \{010, 101\}$ $A_{f_2} = \{011, 100\}$. Видно, что 101 не меньше, чем 011 и 100. Следовательно, в силу теоремы x_1x_3 входит в ядро функции f_2.

Таким образом, исследуя верхние нули и нижние единицы, можно получить:

1) некоторые импликанты произвольной частичной ФАЛ (лемма);
2) часть ядра произвольной всюду определенной ФАЛ (теорема);
3) МДНФ и КДНФ произвольной монотонной всюду определенной ФАЛ (следствие).

Заметим, что обобщить теорему и следствие на случай частичных функций невозможно, так как существуют частичные монотонные функции, МДНФ и КДНФ которых содержат переменные с отрицанием. Например, функция, заданная множествами $M_0 = \{0101\}$ и $M_1 = \{0011, 1001\}$ монотонна, а ее единственная МДНФ и КДНФ равна $\bar{x}_2$.

В связи с этим представляет интерес задача определения класса частичных функций, МДНФ и КДНФ которых не содержат отрицаний над переменными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробков В. К.— В сб.: Проблемы кибернетики, вып. 13.— М., 1965, с. 5.

2. Катериночкина Н. Н.— Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 3, с. 557.
3. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1. Под общей ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова.— М., 1974.

Поступила в редакцию
11.01.79.

Кафедра МО ЭВМ

УДК 62—50

В. М. РАКЕЦКИЙ

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющим параметром:

$$\dot{x}=f(x, u, t), \ x(t_0)=x_0, \ u(t)\in U, \ t\in T=[t_0, t_1], \tag{A}$$

где $f(x, u, t)$ — n-мерная функция; $x\in R^n$; $U\subset R^r$. Абсолютно непрерывную траекторию $x(t)$ будем называть A-допустимой, если существует такое управление (измеримое) $u(t)$, что пара $\{x(t), u(t)\}$ является решением системы (A). Пусть X — множество A-допустимых траекторий.

Аппроксимируем систему (A) последовательностью систем разностных уравнений:

$$x_N(t+h_N)=x_N(t)+h_N f(x_N, u_N, t),$$
$$x_N(t_0)=x_0, \ u_N(t)\in U, \ t\in T_N, \ N=1, 2, \dots, \tag{A_N}$$

которые получаются из (A) при сеточном разбиении $T_N=\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}\}$, $\tau_i=t_0+ih_N$, $h_N=(t_1-t_0)/h_N$, отрезка T и эйлеровой замене производной $\dot{x}(t)\approx[x(t+h)-x(t)]/h$. Траекторию $x_N(t)$ будем называть A_N-допустимой, если найдется такое управление $u_N(t)$, что пара $\{x_N(t), u_N(t)\}$ является решением системы (A_N). Обозначим через $\overset{\infty}{X}_N$ множество всех A_N-допустимых траекторий, $\overset{\infty}{X}=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\overset{\infty}{X}_N$.

Теорема. Пусть функция $f(x, u, t)$ непрерывна по (x, u, t), удовлетворяет условию Липшица по x с константой L, а множество U — компакт. Для того, чтобы множество X было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы было ограничено множество X.

Доказательство. *Достаточность*. Так как множество X ограничено, то

$$\exists K: \forall x(\cdot)\in X\Rightarrow \| x(t) \| \leqslant K, \ t\in T. \tag{1}$$

Пусть $u_N(t)$, $t\in T_N$,— последовательность управлений в системах (A_N), $N=1, 2, \dots$ Положим

$$u^N(t)=u_N(\tau_k), \ t\in[\tau_k, \tau_{k+1}), \ k=\overline{0, N-1}, \tag{2}$$

определив тем самым последовательность управлений $u^N(t)$, $t\in T$, для системы (A). Каждому из управлений $u^N(t)$ будет соответствовать A-допустимая траектория $x^N(t)$, $\| x^N(t) \| \leqslant K$, $t\in T$. В силу (1), (2), непрерывности $f(x, u, t)$ и компактности U, T следует:

$$\exists c_N=o(h_N): \| \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(x^N(t), u^N(t), t)\,dt -$$
$$- h_N f(x^N(\tau_k), u_N(\tau_k), \tau_k) \| \leqslant c_N. \tag{3}$$

Так как $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x, то

$$\| x_N(\tau_{k+1})-x^N(\tau_{k+1}) \| \leqslant \| x_N(\tau_k)-x^N(\tau_k) \| +$$
$$+ \| \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(x^N(t), u^N(t), t)\,dt - h_N f(x_N, u_N, \tau_k) \| \leqslant$$