ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ

ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

№ 5

Асобны адбітак

Мінск 1982

УДК 519.13

Х. Л. АРОЧА

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОКРЫТИЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ЧИСЛО ВХОЖДЕНИЙ КАЖДОГО ЭЛЕМЕНТА В ПОКРЫТИЕ

t-Покрытием множества M называется семейство непустых его подмножеств, объединение которых равно M, и в котором каждый элемент из M входит ровно t раз. Доказывается следующая теорема.

Теорема. *Производящая функция числа t-покрытий мощности n равна*

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{(-x)^i}{i}\right)\sum_{n\geqslant 0} Y_{n,m}\frac{x^n}{n!},$$

где

$$Y_{n,m}=\sum_{k_1+2k_2+\cdots+tk_t=n}\frac{n!}{k_1!\ldots k_t!}\prod_{i=1}^{t}\left(\frac{(-1)^{i-1}}{i}\right)^{k_i}\times$$

$$\times\left(\sum_{i_1+2i_2+\cdots+ti_t=t}\binom{k_1}{i_1}\cdots\binom{k_t}{i_t}\right)^m.$$

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Рукопись депонирована в ВИНИТИ 11.03.82, рег. № 1022-82. Деп. (Статья поступила в редакцию 24.11.81. Полный текст 0,5 а. л., библиогр.— 6 назв.)

УДК 513:531.51

В. К. ЛАПКОВСКИЙ

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ V_{n+1} С ПАРОЙ КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫХ ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ И ИХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ

Найден произвол существования в сферическом пространстве гиперповерхностей V_{n+1} с названным в заглавии свойством. Указаны возможные расслоения этих гиперповерхностей (на семейства сфер и плоскостей). Получена полная классификация подмногообразий гравитации, специально погруженных в рассматриваемые гиперповерхности, из которой следует, что такие подмногообразия гравитации относятся только к первому классу Петрова.

Могилевский технологический институт

Рукопись депонирована в ВИНИТИ 15.02.82, рег. № 690-82. Деп. (Статья поступила в редакцию 14.10.81. Полный текст 2,6 а. л., библиогр.— 16 назв).

Академия наук Белорусской ССР

Редколлегия журнала "Известия АН БССР.

Серия физико-математических наук"

УДК 519.13

Х.Л.Aроча

Перечисление покрытий с ограничением на число вхождений каждого элемента в покрытие

Минск 1982

Введение.

Пусть $t \in \{1,2,\ldots\}$, M — конечное множество, $|M| = m$. Покрытием множества M называется семейство непустых его подмножеств, объединение которых равно M. В [I] была поставлена задача определения числа покрытий, в которых каждый элемент из M входит ровно t раз. Такие покрытия будем называть t-покрытиями. Случай $t = 1$ является хорошо известной задачей о разбиениях множества. Комте [2] и Рейлли [3] изучили случай $t = 2$. Предлагаемая работа посвящена решению этой задачи при произвольном t. Подробно обсудим случаи $t \in \{1,2,3\}$.

Обозначения.

Обозначим число t-покрытий мощности n через $T(m,n,t)$, а через $F(m,n,t)$ — число t-покрытий, в которых допускается пустое множество. Очевидно, $F(m,n,t) = T(m,n,t) + T(m,n-1,t)$, и следовательно,

$$\sum_{n \geq 0} F(m,n,t)\, x^n = (1+x) \sum_{n \geq 0} T(m,n,t)\, x^n. \qquad (I)$$

Пусть $T(m,t)$ — число t-покрытий m-элементного множества.

Далее под словом "граф" понимается помеченный граф без петель и кратных ребер. Мы будем пользоваться теоретико-графовой терминологией из монографии [4].

Пусть $\Gamma(N,H)$ — граф. Обозначим $\Theta(\Gamma,t)$ число отображений $f: N \to \{0,1\}$, удовлетворяющих условиям:

I. $|f^{-1}(1)| = t$,

2. если $\{i,j\} \subset H$, то $f(i)=f(j)$.

Обозначим через d последовательность целых чисел $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$. Определим обобщенный полином Белла как

$$Y_{n,t}(f_t; d) = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+tk_t=n} \frac{n!}{k_1!\ldots k_t!} f(k_1,\ldots,k_t) \prod_{i=1}^{t} \left(\frac{d_i}{i!}\right)^{k_i},$$

где f_t - некоторая функция от переменных $k_1, k_2, \ldots, k_t$.

Введем обозначения:

$$g_i = (-1)^{i-1}(i-1)!, \quad g = (g_1, g_2, \ldots),$$

$$Z_t \equiv Z_t(k_1, k_2, \ldots, k_t) = \sum_{i_1+2i_2+\ldots+ti_t=t} \binom{k_1}{i_1}\binom{k_2}{i_2}\ldots\binom{k_t}{i_t}.$$

<u>Результаты.</u>

Теорема I. Справедлива формула

$$n!\, F(m,n,t) = \sum_{\Gamma} (-1)^{|H|} \Theta^m(\Gamma, t),$$

где сумма берется по всем графам Γ порядка n.

Теорема 2. Производящая функция $\sum_{n\geq 0} T(m,n,t)x^n$ для числа t-покрытий мощности n m-элементного множества равна

$$\mathrm{EXP}\left(\sum_{i=1}^{t} \frac{(-x)^i}{i}\right) \cdot \sum_{n\geq t} Y_{n,t}(Z_t^m; g)\frac{x^n}{n!}.$$

Следствие. Экспоненциальная производящая функция $\sum_{m\geq 0} T(m,t)\, y^m/m!$ для числа t-покрытий m-элементного множества равна

$$\mathrm{EXP}\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{(-1)^i}{i}\right)\cdot\sum_{n\geqslant t} Y_{n,t}\left(e^{yz_t};\, g\right)\frac{1}{n!}\,.$$

Доказательства.

Доказательство теоремы I. Пусть B -- семейство мощности n, подмножеств множества M. Рассмотрим его матрицу инцидентности $\psi(B)$. Пусть $\dot{J}(B)=(j_0,j_1,\ldots j_{2^n-1})$, 2^n -- вектор неотрицательных целых чисел, i -ая координата которого равна числу столбцов в $\psi(B)$, совпадающих с n -разрядной двоичной записью числа i. Так как B определяет $\psi(B)$ с точностью до перестановки строк и $\dot{J}(B)$ определяет $\psi(B)$ с точностью до перестановки столбцов, то число семейств, удовлетворяющих условию Q, равно

$$\frac{1}{n!}\sum_{\substack{K_0+K_1+\ldots+K_{2^n-1}=m\\ L(K_0,K_1,\ldots,K_{2^n-1})}}\frac{m!}{K_0!\ldots K_{2^n-1}!}\,, \tag{2}$$

где дополнительное ограничение на индексы суммирования $L(K_0,K_1,\ldots,K_{2^n-1})$ определяется условием Q.

Пусть $\tilde{x}_n=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\tilde{y}_{2^n}=(y_0,y_1,\ldots,y_{2^n-1})$ - векторы булевых переменных. Обозначим через $V_\rho\,\tilde{y}_{2^n}(f(\tilde{x}_n))$ /через $\Lambda_\rho\,\tilde{y}_{2^n}(f(\tilde{x}_n))$ / булевую функцию $y_{i_1}\vee y_{i_2}\vee\ldots\vee y_{i_r}$ /соответственно $y_{i_1}\wedge y_{i_2}\wedge\ldots\wedge y_{i_r}$ /, где $i_1,i_2,\ldots,i_r$ - это номера наборов $\tilde{\sigma}_n=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, $\sigma_i\in\{0,1\}$, на которых $f(\tilde{\sigma}_n)=1$. Пусть для $i\in\{0,1,\ldots\}$, $\rho(i)$ означает число единиц в двоичной записи числа i.

Легко увидеть, что в нашем случае (2) превращается в следующую формулу

$$n!\,F(m,n,t) = \sum_{\substack{K_0+K_1+\ldots+K_{2^n-1}=m \\ K_i=0,\ \rho(i)\neq t \\ \bigwedge_{\{i,j\}\in\binom{N}{2}} V_\rho \tilde{\mathcal{Y}}_{2^n}(x_i\oplus x_j)}} \frac{m!}{K_0!\ldots K_{2^n-1}!}, \tag{3}$$

где $\mathcal{Y}_i$ - это ограничение $K_i \geqslant 1$, символ $\bigwedge_{\{i,j\}\in\binom{N}{2}}$ означает конъюнкцию по всем неупорядоченным парам $\{i,j\}$ элементов множества $N=\{1,2,\ldots,n\}$ и $\oplus$ - сумма по модулю 2.

Действительно, формула (3) следует из того, что ограничение $K_i = 0$, $\rho(i)\neq t$ допускает вхождение в $\psi(B)$ лишь столбцов с t единицами. Ограничение $\bigwedge V_\rho \tilde{\mathcal{Y}}_{2^n}(x_i\oplus x_j)$ означает, что все строки матрица $\psi(B)$ - различны.

Если в (3) применить принцип включения-исключения правила де Моргана (смотреть [5], стр.16) и определение функций V_ρ, Λ_ρ получим

$$n!\,F(m,n,t) = \sum_{H\in 2^{\binom{N}{2}}} (-1)^{|H|} \sum_{\substack{K_0+K_1+\ldots+K_{2^n-1}=m \\ K_i=0,\ \rho(i)\neq t \\ \Lambda_\rho \bar{\tilde{\mathcal{Y}}}_{2^n}\left(\bigvee_{\{i,j\}\in H} x_i\oplus x_j\right)}} \frac{m!}{K_0!\ldots K_{2^n-1}!},$$

где первый знак суммы означает суммирование по всем подмножествам множества $\binom{N}{2}$ всех неупорядоченных пар элементов множества $N=\{1,2,\ldots,n\}$, то есть суммирование по всем графам $\Gamma(N,H)$.

Обозначим теперь через $\Theta(\Gamma,t)$ число нулей в уровне t функции $\bigvee_{\{i,j\}\in H} x_i\oplus x_j$ (легко проверить, что это определение Θ совпадает с ранее сформулированным). Тогда под знаком второй суммы будет стоять $2^n-\binom{n}{t}+\binom{n}{t}-\Theta(\Gamma,t)$ ограничений вида $K_j'=0$, и значит, в силу полиномиальной теоремы, получим формулу, которую требовалось доказать. Теорема доказана.

Для дальнейшего изложения нам будет нужна вспомогательная лемма. Пусть a_k, b_k и c_k - числа графов порядка k, удовлетворяющих свойствам $P(a)$, $P(b)$ и $P(c)$ соответственно. Пусть $a_k^{ч}$ означает число графов порядка k с четным числом ребер. Аналогично определяются $a_k^{н}$, $a_k^{ч-н}$, $b_k^{ч}$,... Обозначим через A, $A^{ч}$, $A^{ч-н}$, ... соответствующие экспоненциальные производящие функции.

Лемма. Если $C=A\,.\,B$, то $C^{ч-н}=A^{ч-н}.\,B^{ч-н}$. Доказательство. Если выполняется $C=A\,.\,B$, то по лемме пересчета помеченных графов ([6] , стр.18) должны выполняться $C^{ч}=A^{ч}.\,B^{ч}+A^{н}.\,B^{н}$ и $C^{н}=A^{ч}B^{н}+A^{н}B^{ч}$. Из первого вычтем второе и получим нужное. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть граф Γ имеет K_1, K_2, ..., K_t компонент связности порядка $1, 2, \ldots, t$ соответственно. На компонентах связности порядка $>t$ графа Γ нельзя распределить t единиц так, чтобы всякие две смежные вершины были помеченными единицей. Поэтому $\Theta(\Gamma,t)$ равно $\Theta(\Gamma',t)$, где Γ' - это подграф графа Γ, состоящий из его компонент связности порядка $\leq t$. Каждую компоненту из Γ' нужно полностью отметить либо 0, либо I. Значит, если для компонент порядка ℓ мы сможем выделить $\ell.i_\ell$ единиц, то их можно отметить $\binom{K_\ell}{i_\ell}$ способами. Просуммировав по всем разбиениям числа t , получим

$$\Theta(\Gamma,t) = Z_t(k_1,k_2,\ldots,k_t). \qquad (4)$$

На основании (4) и теоремы I будем иметь

$$n!\,F(m,n,t) = \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+tk_t=n-\ell} b_n(k_1,\ldots,k_t), \qquad (5)$$

где $b_n(k_1,\ldots,k_t)$ - число графов порядка n с четным числом ребер, имеющих точно $k_1, k_2, \ldots, k_t$ компонент связности порядка I, 2, ... , t соответственно, минус число таких же графов с нечетным числом ребер.

Пусть $a_n(g_n)$ означает число графов (связных графов) порядка n с четным числом ребер минус число таких же графов с нечетным числом ребер.

Обозначим через $a_n(=t)$ $(a_n(<t), a_n(\le t)$, и т.д.) число графов порядка n , все компоненты связности которых имеют порядок t (соответственно меньше t , меньше или равно t , и т.д.), с четным числом ребер минус число таких же графов с нечетным числом ребер. Экспоненциальные производящие функции этих величин будем обозначать соответствующими заглавными буквами.

По Лемме

$$A(=t) = \mathrm{EXP}\left(g_t\, x^t/t!\right).$$

Еще раз применяя лемму, получим

$$A(\le t) = \mathrm{EXP}\left(\sum_{i=1}^{t} g_i \frac{x^i}{i!}\right) =$$

$$= \sum_{j\geq 0} \sum_{K_1+2K_2+\ldots+tK_t=j} \left\{ \frac{j!}{K_1!\ldots K_t!} \prod_{i=1}^{t} \left(\frac{g_i}{i}\right)^{K_i} \right\} \frac{x^j}{j!}\,.$$

Причем, можно легко показать, что содержимое в фигурных скобках есть $b_j(K_1,\ldots,K_t)$. Элементарные комбинаторные рассуждения дают $b_n(K_1,\ldots,K_t)=\binom{n}{\ell} b_{n-\ell}(K_1,\ldots,K_t)\,a_\ell(>t)$, что в сочетании с (5) и (I) дает

$$\sum_{n\geq 0} T(m,n,t)x^n = (1+x)^{-1} A(>t) \sum_{n\geq t} Y_{n,t}(Z_t^m; g)\frac{x^n}{n}. \qquad (6)$$

По лемме имеем $A=A(\leq t)A(>t)$ и отсюда (так как $A=1+x$) получим

$$A(>t)=A.A^{-1}(\leq t)=(1+x)\,\mathrm{EXP}\left(-\sum_{K=1}^{t} g_K \frac{x^K}{K!}\right). \qquad (7)$$

Наконец, применяя в последний раз лемму, получим, что $A=\mathrm{EXP}\,G$, то есть $G=\ln(1+x)$,откуда $g_i=(-1)^{i-1}(i-1)$!

Последнее,в сочетании с (6) и (7), доказывает теорему 2.

Доказательство следствия. В силу теоремы

$$\sum_{n\geq 0} T(m,n,t) = \mathrm{EXP}\left(\sum_{i=1}^{t} \frac{(-1)^i}{i}\right) \cdot \sum_{n\geq t} Y_{n,t}(Z_t^m; g)\frac{1}{n!}\,.$$

Поэтому

$$\sum_{m\geq 0} T(m,t)\frac{y^m}{m!} = \mathrm{EXP}\left(\sum_{i=1}^{t} \frac{(-1)^i}{i}\right) \cdot \sum_{\substack{n\geq t\\ m\geq 0}} Y_{n,t}(Z_t^m; g)\frac{y^m}{n!\,m!} =$$

$$=\mathrm{EXP}\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{(-1)^i}{i}\right)\cdot\sum_{n\geq t}Y_{n,t}\left(\sum_{m\geq 0}Z_t^m\frac{y^m}{m!};g\right)\frac{1}{n!}=$$

$$=\mathrm{EXP}\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{(-1)^i}{i}\right)\cdot\sum_{n\geq t}Y_{n,t}\left(e^{yZ_t};g\right)\frac{1}{n!}.$$

Следствие доказано.

Частные случаи.

I. При $t=1$, теорема 2 дает классические результаты [I]

$$\sum_{n\geq 0}T(m,n,1)x^n=e^{-x}\sum_{n\geq 1}Y_{n,1}(Z_1^m;g)\frac{1}{n!}= \tag{8}$$

$$=e^{-x}\sum_{n\geq 1}\frac{n^m}{n!}x^n=\sum_{n\geq 0}\sigma(m,n)x^n=\sigma_m(x)$$

и, следовательно, $T(m,n,1)=\sigma(m,n)$, где $\sigma(m,n)$ - число Стирлинга второго ряда. При $x=1$, получаем число Белла $\sigma_m=\sum_{n\geq 0}\sigma(m,n)$, которое дает общее число разбиений множества M.

2. Положив $t=2$ в теореме 2, получим

$$\sum_{n\geq 0}T(m,n,2)x^n=\mathrm{EXP}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)\sum_{n\geq 2}Y_{n,2}(Z_2^m;g)\frac{x^n}{n!}. \tag{9}$$

В силу следствия, при $t=2$, получим

$$\sum_{m\geq 0}T(m,2)\frac{y^m}{m!}=\mathrm{EXP}\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n\geq 2}Y_{n,2}\left(e^{yZ_2};g\right)\frac{1}{n!}. \tag{IO}$$

Здесь

$$\sum_{n\geq 2} Y_{n,2}(e^{y Z_2};g)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n\geq 2} Y_{n,2}\left(e^{y\binom{k_1}{2}}e^{k_2 y};g\right)\frac{x^n}{n!}=$$

$$=\sum_{n\geq 2} e^{y\binom{n}{2}}\frac{x^n}{n!}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{e^y}{2}\right)^n\frac{x^{2n}}{n!}. \qquad (11)$$

В справедливости (11) можно убедиться, перемножив эти ряды. Если в (11) положить $x = 1$ и сделать подстановку (11) в (10), то получим формулу Комте [2]

$$\sum_{n\geq 0} T(m,2)\frac{y^m}{m!}=\mathrm{EXP}\left(1-\frac{e^y-1}{2}\right)\sum_{n\geq 2}\frac{e^{y\binom{n}{2}}}{n!}.$$

Если в формуле (9) разложить Z_2^m по формуле бинома, то после некоторых выкладок, получим

$$\sum_{n\geq 0} T(m,n,2)x^n=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sigma\left(\frac{-x^2}{2}\right)2^{-k}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell}\binom{k}{\ell}\sigma_{2k-\ell}(x).$$

Положив $x = 1$, умножив на $y^m/m!$ и просуммировав по m, получим формулу Рейлли [3]

$$\sum_{m\geq 0} T(m,2)\frac{y^m}{m!}=\mathrm{EXP}\left(\frac{1-e^y}{2}\right)\cdot\sum_{n\geq 0}\frac{d_n}{2^n}\frac{y^n}{n!},$$

где $d_n=\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{\ell}\binom{k}{\ell}\sigma_{2n-\ell}$

3. При $t = 3$ можно получить аналогичные соотношения, например:

$$\sum_{m,n\geq 0} T(m,n,3)\, x^n \frac{y^m}{m!} = \mathrm{EXP}\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}(1-e^y)\right)A(x,y),$$

$$\sum_{m\geq 0} T(m,3)\frac{y^m}{m!} = \mathrm{EXP}\left(-\frac{1}{2}+\frac{e^y-1}{3}\right)A(1,y),$$

где $A(x,y) = \sum_{m\geq 3}\ \sum_{K_1+2K_2=m} \frac{x^m}{K_1!\,K_2!}\left(\frac{-1}{2}\right)^{K_2} e^{y\left(\binom{K_1}{3}+K_1K_2\right)}$.

Доказательства этих формул тривиальны. Начальные значения величины $T(m,n,3)$ показаны в следующей таблице

m \ n	3	4	5	6	7	$T(m,3)$
3	0	I	3	I		5
4	0	7	57	95	28	I87

Литература

1. Bender E., Asymptotic methods in enumeration Siam Review 16, № 4 (1974), 485-515. /Русский перевод в сб.: Перечислительные задачи комбинаторного анализа. М., 1979/.

2. Comtet L., Bircouvrements et birevetements d'un ensemble fini, Studia Sci. Math. Hungar, 3 (1968) 137-152.

3. Reilly J., Bicovering of a finite set by generating function methogs, J. Comb. Theory, A28, №3 (1980), 219-225.

4. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.

5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.

6. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977.

-13-

Печатается в соответствии с решением заседания редколлегии журнала "Известия АН БССР", серия физико-математических наук от 18 января 1982 г.

В печать 5.2.82 32792

Тир. 1 Цена 67 коп. Зак.

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403