Propiedades del polinomio independiente de un grafo

Jorge Luis Arocha, Instituto de Matemática, Cibernética y Computación. Academia de Ciencias de Cuba

RESUMEN

En el trabajo se estudia el polinomio $\gamma(G,t)=\sum_{n\geq 0}\gamma_n(G)t^n$, donde $\gamma_n(G)$ es el número de conjuntos independientes de n vértices del grafo G. En particular se hallan para $\gamma(G,T)$ una fórmula recurrente, fórmulas para la suma y la unión de grafos, fórmulas explícitas para los grafos n-partidos, cadenas, ruedas, etc. y la fórmula

$$\gamma(G^*,t) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}t^k,$$

donde G* es un grafo aleatorio de n vértices.

ABSTRACT

In this paper it is studied the polinomial $\gamma(G,t)=\sum_{n\geq 0}\gamma_n(G)t^n$, where $\gamma_n(G)$ is the number of independent sets of n points of graph G. In particular, a recurrent formula for $\gamma(G,T)$ is found, as well as formulae for the sum and union of graphs, explicit formulae for complete m-partite graphs, paths, rollers and so on, and the formula

$$\gamma(G^*,t) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}t^k,$$

where G* is a random graph with n points.

INTRODUCCIÓN

Sea N un conjunto finito y H un conjunto de pares no ordenados de elementos desiguales de N. entonces un grafo es el par ordenado G=(N,H). A los elementos de N se le denominan vértices del grafo G, a los elementos de H se le denominan aristas del grafo G. Un subconjunto I de vértices

$I \subseteq N$ se le denomina independiente si y sólo si $\forall x,y \in I, \{x,y\} \notin H$.

El estudio de los conjuntos independientes tiene gran importancia para la teoría de grafos y sus aplicaciones (véase [1,2]).

Sean $\gamma_n(G)$ el número de conjuntos independientes I del grafo G tales que $|I|=n$. Por analogía al polinomio cromático introducido en [3] para la investigación de la famosa hipótesis (ya demostrada) de los cuatro colores, a la expresión

$$\gamma(G,t) = \sum_{n\geq 0} \gamma_n(G)t^n$$

se le denomina como polinomio independiente del grafo G. Como se demuestra en [4,5], los polinomios independientes juegan un papel fundamental en la solución de ciertos problemas de conteo de familias de subconjuntos En particular, una fórmula para $\Sigma\gamma^m(G,1)$, donde la suma recorre todos los grafos posibles en el conjunto de vértices $\{1,2,\ldots,n\}$, decidirá la resolución del problema del conteo los elementos de un retículo libre distributivo planteado por Dedekind más de medio siglo atrás [6].

En este trabajo se hace un estudio teórico de los polinomios independientes y se demuestran propiedades que facilitan el cálculo de éste.

II. DESARROLLO

Sea $G=(N,H)$ un grafo. Se dice que $i,j\in N$ son vecinos si y sólo si $\{i,j\}\in H$. Si $h\in H$ e $i\in N$ se dice que la arista h incide en el vértice i si y sólo si $h=\{i,k\}$. Sea un subconjunto cualquiera de vértices de G. Por G-A se denota el subgrafo de G que contiene todos los vértices de G menos aquellos que pertenecen a A y que contiene todas las aristas de G excepto aquellas que inciden en elementos de A. Si $i\in N$ entonces la vecindad de primer grado de i^* de i es el conjunto de vértices que contiene a i y a todos los vértices vecinos de i.

Si $G_1=(N_1,H_1)$ y $(G_2=(N_2,H_2)$ son dos grafos tales que $N_1 \cap N_2=\phi$, entonces por $G_1 \cup G_2$ se denota el grafo $(N_1 \cup N_2, H_1 \cup H_2)$. La suma de dos grafos G_1+G_2 introducida por Zykof [7] es el grafo siguiente

$G_1+G_2=(N_1 \cup N_2, H_1 \cup H_2 \cup \{\{x,y\} \mid x \in N_1, y \in N_2\})$.

Para comodidad de las fórmulas se define el grafo vacío ϕ como el grafo (ϕ,ϕ).

Teorema 1.

El polinomio $\gamma(G,t)$ se define por las siguientes propiedades

$\gamma(\phi,t) = 1,$ 1.1

$\gamma(G_1 \cup G_2,t) = \gamma(G_1,t)\gamma(G_2,t)$ 1.2

$$\gamma(G,t) = \gamma(G-i,t) + t\gamma(G-i^*,t) \ , \qquad 1.3$$

$$\gamma(G_1+G_2,t) = \gamma(G_1,t) + \gamma(G_2,t) - 1 \ . \qquad 1.4$$

Demostración:

Es evidente que si se cumplen las propiedades 1.1 - 1.4 estas definen recursivamente al polinomio $\gamma(G,t)$.

Por definición el conjunto vacío de vértices es independiente y por eso 1.1 es válida. La propiedad 1.2 se demuestra fácilmente. Efectivamente, entre N_1 y N_2 no hay aristas, por esto si $A_1 \subsetneq N_1$ y $A_2 \subsetneq N_2$ son independientes en G_1 y G_2 respectivamente entonces $A_1 \cup A_2$ es independiente en $G_1 \cup G_2$ y además $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$. Por esto

$$\gamma_k(G_1 \cup G_2) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(G_1)\gamma_j(G^2)$$

y de aquí en virtud de la regla de multiplicación de series en el álgebra de Cauchy se deduce 1.2.

Demostremos 1.3. Para más claridad de la demostración necesitaremos un Lema.

Lema. La magnitud $\gamma_k(G)$ es igual al número de correspondencias $f_G : N \to \{0,1\}$ tales que: 1) $|f_G^{-1}(1)| = k$,

2) si $\{i,j\} \in H$ y $f_G(i) = 1$ entonces $f_G(j) = 0$

La demostración es evidente ya que tal correspondencia define biunívocamente un conjunto independiente $f_G^{-1}(1)$ en G.

Hallemos el número de correspondencias f_G. Para esto cojamos un vértice i cualquiera del grafo G. La imagen de i por f_G puede ser 0 ó 1. Si $f_G(i) = 0$ entonces las imágenes de los demás vértices pueden ser escogidas de $\gamma_k(G-i)$ formas.

Por otro lado si $f_G(i)=1$ entonces las imágenes por f_G de todos los vértices vecinos con i deben ser ceros y por esto las imágenes de los vértices distintos de i pueden ser escogidos de $\gamma_{k-1}(G-i^*)$ maneras. De aquí $\gamma_k(G) = \gamma_k(G-i)+\gamma_{k-1}(G-i^*)$. Multiplicando esta igualdad por t^k y sumando por todos los posibles k obtendremos 1.3.

Para la demostración de 1.4 usaremos 1.3 con relación a un vértice $i \in G_2$.

Teniendo en cuenta la definición de G_1+G_2 obtendremos:

$$\gamma(G_1+G_2,t) = \gamma((G_1+G_2)-i,t)+t\gamma((G_1+G_2)-i^*,t) =$$

$$=\gamma(G_1+(G_2-i),t)+t\gamma(G_2-i^*,t) =$$

$$=\gamma(G_1+(G_2-i),t)+\gamma(G_2,t)-\gamma(G_2-i,t).$$

Seguidamente si $i,j,\ldots,k$ son todos los posibles vértices de G_2 aplicando 1.3 sucesivamente obtendremos:

$$\gamma(G_1+G_2,t) = \gamma(G_1+G_2-i-j),t) + \gamma(G_2,t) - \gamma(G_2-i-j,t) =$$
$$= \ldots = \gamma(G_1+(G_2-i-j-\ldots-k),t) + \gamma(G_2,t) - \gamma(G_2-i-j-\ldots-k,t) =$$
$$= \gamma(G_1+\phi,t) + \gamma(G_2,t) - \gamma(\phi,t) = \gamma(G_1,t) + \gamma(G_2,t) - 1.$$

Con lo que queda demostrado el teorema.

Definamos el Polinomio de Fibonacci $F_n(t)$, $n \geq 0$ con la expresión

$$\sum_{n\geq 0} F_n(t)x^n = (1-x-tx^2)^{-1}$$

Este polinomio cumple las siguientes propiedades:

F1: $F_0(t) = 1$,
F2: $F_n(t) = F_{n-1}(t) + tF_{n-2}(t)$,
F3: $F_n(1) = F_n$,

donde F_n es el enésimo número de Fibonacci.

Un grafo completo es aquel que $H = \{\{x,y\} | x,y \in N\}$. Un grafo totalmente no conectado es aquel que $H = \phi$. Un grafo n-partido es aquel que $\{N_1,N_2,\ldots,N_n\}$ es una partición de N y

$$\{x,y\} \in H \Longleftrightarrow x \in N_i \wedge y \in N_j \wedge i \neq j.$$

Una cadena es un grafo en el cual $N = \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ y

$$\{x,y\} \in H \Longleftrightarrow \exists\ i \in \{1,\ldots,n\} |\ x = a_i,\ y = a_{i+1}.$$

Un ciclo es una cadena a la cual se le agrega una arista $\{a_1,a_n\}$. Una rueda es un ciclo al cual se le agrega un vértice a_0 y n aristas $\{a_0,a_1\}$, $\{a_0,a_2\},\ldots,\{a_0,a_n\}$.

Estos grafos se determinan salvo isomorfismos por su número de vértices y en el caso de un grafo n-partido este se determina por las potencias de las partes $m_1=(N_1|, m_2=|N_2), \ldots$. Denotaremos estos grafos por $\mathbb{K}_n$, $\overline{\mathbb{K}}_n$, $\mathbb{K}(m_1,\ldots,m_n)$, $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{C}_n$ y W_n respectivamente en el orden en que los definimos.

Teorema 2.

Son válidas las siguientes expresiones:

$$\gamma(\mathbb{K}_n,t) = 1+nt, \qquad 2.1$$
$$\gamma(\overline{\mathbb{K}}_n,t) = (1+t)^n, \qquad 2.2$$
$$\gamma(\mathbb{K}(m_1,\ldots,m_n),t) = 1-n + \sum_{i=1}^{n}(1+t)^{m_i}, \qquad 2.3$$

$$\gamma(\mathbb{P}_n,t) = F_{n+1}(t), \qquad 2.4$$

$$\gamma(\mathbb{C}_n,t) = F_{n-1}(t) + 2t\, F_{n-2}(t), \qquad 2.5$$

$$\gamma(W_n,t) = F_{n-2}(t) + 2t\, F_{n-3}(t) + t. \qquad 2.6$$

Demostración:

2.1 es trivial ya que en $\mathbb{K}_n$ independientes solamente pueden ser el conjunto vacío y los conjuntos formados por un solo vértice. 2.2 se obtiene teniendo en cuenta que $\overline{\mathbb{K}}_n = \mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{K}_1$, n veces y aplicando 1.2. La validez de 2.3 implica de 1.4 y de que $\mathbb{K}(m_1,\ldots,m_n) = \overline{\mathbb{K}}_{m_1} + \overline{\mathbb{K}}_{m_2} + \ldots + \mathbb{K}_{m_n}$.

Demostremos 2.4. Utilizando la descomposición 1.3 por cualquier vértice colgante (un vértice es colgante si y sólo si a él incide una sola arista) de $\mathbb{P}_n$ obtendremos $\gamma(\mathbb{P}_n,t) = \gamma(\mathbb{P}_n - i,t) + t\gamma(\mathbb{P}_n - i^*,t) =$

$$= \gamma(\mathbb{P}_{n-1},t) + t\gamma(\mathbb{P}_{n-2},t),$$

además tenemos $\gamma(\mathbb{P}_0,t) = \gamma(\phi,t) = 1 = F_1(t)$ y $\gamma(\mathbb{P}_1,t) = \gamma(\mathbb{K}_1,t) = 1+t = F_2(t)$ y por tanto en virtud de las propiedades F1 y F2 obtendremos que $\gamma(\mathbb{P}_n,t) = F_{n+1}(t)$.

Utilizando 1.3 por cualquier vértice de $\mathbb{C}_n$ tendremos

$$\gamma(\mathbb{C}_n,t) = \gamma(\mathbb{P}_{n-1},t) + t\gamma(\mathbb{P}_{n-3},t)$$

lo que demuestra 2.5. En fin utilizando 1.3 por el vértice central de W_n obtendremos la demostración de 2.6 y con ella de todo el teorema.

Un grafo se llama marcado si y sólo si $N=\{1,2,\ldots,n\}$. Introduzcamos en el conjunto de todos los grafos marcados $\mathbb{G}_n$ una medida probabilística

$$P(G) = \frac{1}{|\mathbb{G}_n|}, \quad \forall\, G \in \mathbb{G}_n,$$

Entonces $\gamma(G,t)$ se convierte en una variable aleatoria con un valor medio igual a

$$\mu_n(t) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathbb{G}_n} \gamma(G,t). \qquad 3.1$$

Teorema 3.

El valor medio de $\gamma(G,t)$ en $\mathbb{G}_n$ es igual a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} t^k.$$

Demostración:

En virtud de 1.2 tenemos

$$2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} \gamma(G,t) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} \gamma(G-i,t) + t2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} \gamma(G-i^*,t) \qquad 3.2$$

La primera suma en la parte derecha de esta igualdad es una suma por todos los grafos marcados de orden n-1. El vértice i se puede unir a cada uno de estos grafos exactamente de 2^{n-1} formas y por tanto esta suma es igual a

$$2^{n-1} \sum_{G \in \mathcal{G}_{n-1}} \gamma(G,t). \qquad 3.3$$

La segunda suma en la parte derecha depende del orden de i (el orden de un vértice es el número de aristas incidentes al vértice). Si el orden de i es K entonces esta suma es una suma por todos los grafos marcados de orden n-k-1. Las marcas dentro de los K vértices incidentes a i se pueden escoger de $\binom{n-1}{k}$ formas. Estos vértices se pueden entrelazar entre sí de $2^{\binom{k}{2}}$ formas y estos con los demás N-K-1 de $2^{k(n-k-1)}$ formas, por lo tanto la segunda suma es igual a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{\binom{k}{2}} 2^{k(n-k-1)} \sum_{G \in \mathcal{G}_{n-k-1}} \gamma(G,t) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 2^{\binom{n-1}{2}} 2^{-\binom{j}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_j} \gamma(G,t) , \qquad 3.4$$

Sustituyendo 3.3 y 3.4 en 3.2 y teniendo en cuenta la definición 3.1 obtendremos

$$\mu_{n+1}(t) = \mu_n(t) + t2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_k(t) \qquad 3.5$$

Denotemos por $\mu(x,t)$ la función exponencial generatriz

$$\mu(x,t) = \sum_{n\geq 0} \mu_n(t) \frac{x^n}{n!}$$

Multiplicando por $x^n/_{n!}$ en 3.5 y sumando por todos los $n \geq 0$ obtendremos

$$\frac{\partial \mu(x,t)}{\partial x} = \mu(x,t) + t \sum_{n\geq 0} 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_k(t) \frac{x^n}{n!} =$$

$$= \mu(x,t) + t \sum_{k\geq 0} \mu_n(t) \sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} \frac{(x/2)^n}{n!} =$$

$$= \mu(x,t) + t\, e^{x/2} \sum_{k\geq 0} \mu_k(t) \frac{(x/2)^n}{n!}$$

y por tanto

$$\frac{\partial \mu(x,t)}{\partial x} = \mu(x,t) + t\, e^{x/2}\, \mu(x/2, t).$$

Buscaremos la solución de esta ecuación diferencial en la forma

$$\mu(x,t) = e^x E(x,t) \Rightarrow e^x E(x,t) + e^x \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = e^x E(x,t) + t e^x E(x/2, t).$$

De donde

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = tE(\tfrac{x}{2}, t) \qquad 3.6$$

Teniendo en cuenta que según [8] la solución de la ecuación

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = F(x/2) \text{ es } F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!\,2^{\binom{n}{2}}},$$

obtenemos evidentemente que la solución de 3.6 es

$$E(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(t\,x)^n}{n!\,2^{\binom{n}{2}}},$$

y de aquí

$$\mu(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{(tx)^n}{n!\,2^{\binom{n}{2}}},$$

de lo que

$$\mu_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{u} 2^{-\binom{k}{2}} t^k.$$

El hecho de que esta solución satisface la condición de frontera $\mu_0(t) = 1$ completa la demostración del teorema.

III. CONCLUSIONES

Un aspecto que quisiéramos señalar es la congruencia entre las propiedades del polinomio independiente de un grafo y su polinomio cromático. Esta se basa fundamentalmente en la analogía entre 1.2 y la igualdad

$$\psi(G,t) = \psi(G+uv,t) + \psi(\varepsilon G,t)$$

válida para el polinomio cromático $\psi(G,t)$. Por ejemplo el análogo del teorema 3 para $\psi(G,t)$ es el teorema de Read [9] que plantea que el valor medio

$$\Theta_n(t) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G\in G_n} \psi(G,t)$$

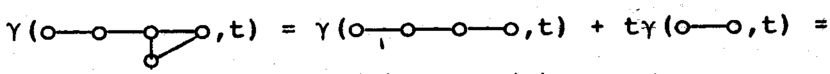
está dado por la expresión

$$\sum_{n\geq 0} \Theta_n(t) \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!\,2^{\binom{n}{2}}} \right)^t = F^t(x)$$

(véase también [8]).

Hagamos incapié en los aspectos de cálculo del polinomio independiente de un grafo. Es conocido [10] que el problema del cálculo del número de independencia vertical (el mayor n tal que $\gamma_n(G)>0$) es un problema NP-completo y por lo tanto el problema del cálculo de $\gamma(G,t)$ es NP-difícil. De esto se desprende que es prácticamente imposible esperar algoritmos polinomiales para el cálculo de $\gamma(G,t)$. El teorema 1 ofrece evidentemente un algoritmo, aunque asintóticamente exponencial, mucho mejor que el algoritmo exhaustivo. Una realización de este se podría efectuar por ejemplo, con los métodos de programación dinámica. Especialmente es cómodo efectuar el cálculo de $\gamma(G,t)$ por este esquema, cuando se necesita hallar $\gamma(G,t)$ para todos los grafos posibles tales que $|N| \leq n^*$

El teorema 2 complementa a este esquema de cálculo en el sentido de que la existencia de fórmulas no recursivas para ciertas clases de grafos, acortan en gran medida el árbol de cálculo dado por 1.2, por ejemplo



$$= F_5(t) + tF_2(t) =$$

$$= 1 + 4t + 3t^2 + t(1+t) =$$

$$= 1 + 5t + 4t^2$$

BIBLIOGRAFÍA

1) Harary F.
1969. Graph Theory, Adison - wesley.

2) Ore, O.
1962. Theory of Graphs, American Mathematical Society, Colloquium Publ. Vol.38.

3) Birkhoff, G., D.Lewis
Chromatic polinomials, Trans. Amer. Math. Soc., 60 (1946), pp. 355-451.

4) Arocha, J.
1981. Disertatsia k.f.m.n., Minsk.

5) ——————
Chislo antitsepei dlini 5 y 6, Isvestia AN BSSR (en edición).

6) Dedekind, R.
Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler, Festchrift Hoch. Braunschweig, 1897 u. Ges. Werke, Bd. II, 103-148.

7) Zykof, A.A.
O nekotorij sboistbaj linieinij complecsof, Matematichesky Sbornik, 24, 2(1949), 163-188.

8) Stanley, R.P.
Acyclic orientations of graph, Discrete Math., 5, 2(1973), 171-178.

9) Read, R.
The number of k-colored graph on labelled nodes, Canad. J.Math., 12, 3(1960), 410-414.

10) Karp, R.M.
Reducibility among combinatorial problems, Complexity of computer computation, E.R.Miller and J.W. Thatcher (Eds.), Plenum Press, 1972, 85-104.

Recibido: 31 de enero de 1983.