REVISTA CIENCIAS MATEMÁTICAS Vol.VI, No. 2, 1985

Enumeration of non-disjont families

Jorge Luis Arocha Pérez, IMACC ACC

RESUMEN

Sea $M = \{1,2,\ldots,m\}$. Veamos las familias $B \subsetneq 2^M$ tales que

1) $\forall B_i, B_j \in B, B_j \cap B_i \neq \phi$

2) $|B| = n$

En este trabajo se demuestra que para obtener el número $T_{m,n}$ de familias que cumplan estas condiciones, es suficiente examinar todos los grafos conectados de orden no mayor que n

ABSTRACT

Let $M = \{1,2,\ldots m\}$. Consider all families $B \subsetneq 2^M$ such that

1) $\forall B_i, B_j \in B, B_i \cap B_j \neq \emptyset$

2) $|B| = n$

In this paper it is proved that in order to find the number $T_{m,n}$ of families which satisfy these conditions, it is enough to examine all conected graphs whose order is not greater than n.

Sea $M = \{1,2,\dots,m\}$. Denotemos por 2^M el conjunto de todos los subconjuntos de M. Veamos las familias $B \subseteq 2^M$ tales que

$$\forall B_i,\ B_j \in B\ ,\ B_i \cap B_j \neq \phi \qquad (1)$$

Las familias de subconjuntos que cumplen la condición (1) se denominan no disjuntas. El problema del conteo de las familias no disjuntas, que consiste en hallar el número $T_{m,n}$ de familias $B \subseteq 2^M$ tales que $|B| = n$ y que cumplen (1), es muy difícil y por esto el esfuerzo de los investigadores ha estado dirigido a obtener fórmulas aproximadas y evaluaciones asintóticas de la magnitud $T_{m,n}$ (véanse los resúmenes [1,2]).

En este trabajo se demuestra que para el conteo de las familias no disjuntas es suficiente examinar todos los grafos conectados no isomorfos de orden mayor que n.

Aclaremos un poco la terminología (según [3]). Si N es un conjunto finito entonces un grafo G es una pareja ordenada (N,H), donde H es un conjunto cualquiera de pares ordenados de elementos desiguales de N. Los elementos de N se denominan vértices del grafo G. Igualmente los elementos de H se denominan aristas del grafo G. El cardinal de N se denomina orden del grafo G y se denota $|G|$. Se dice que los vértices i y j son vecinos si y sólo si $\{i,j\} \in H$. La relación de vecindad entre los vértices de G es simétrica y antireflexiva. Por otra parte toda relación asimétrica y antireflexiva R en un conjunto N define evidentemente un grafo G = (N,H), donde H es el conjunto de pares no ordenados de elementos de N que se relaciona mediante R.

La clausura transitiva de la relación de vecindad se le denomina relación de conectividad. La relación de conectividad es una relación de equivalencia y define una partición $N_1,N_2,\dots,N_k$ del conjunto de vértices y del conjunto de aristas $H_1,H_2,\dots,H_k$. Los grafos $G_1=(N_1,H_1),\dots,G_k(N_k,h_k)$ se denominan componentes conectadas del grafo G. Se dice que un grafo es conectado si y sólo si el posee una componente conectada única.

Un grafo G = (N,H) se denomina grafo marcado si y sólo si $N=\{1,2,\dots,N\}$ Sean $G_1=(H_1,H_1)$ y $G_2=(N_2,H_2)$ dos grafos. Se dice que los grafos G_1 y G_2 son isomorfos, si y sólo si existe una biyección $f:N_1 \to N_2$ tal que $\forall x_1,x_2 \in N_1,\ (\{x_1,x_2\} \in H_1) \Rightarrow (\{f(x_1),f(x_2)\} \in H_2)$.

El isomorfismo de grafos es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los grafos. Un conjunto de grafos no isomorfos es un conjunto de grafos que pertenecen a distintas clases de equivalencias de la relación de isomorfismo.

Sea $G=(N,H)$ un grafo. Un conjunto de vértices de G se llama independiente si ninguno de estos vêrtices son vecinos entre sí. Denotaremos por $\gamma(G)$ el número de conjuntos independientes de vértices del grafo G.

Los números de Stirling de primer género $\}^n_k\{$ y de segundo género $\{^n_k\}$ se definen respectivamente mediante las fórmulas:

$$x^n = \sum_{k=o}^{n} \{^n_k\}(x)_h \quad ,$$

$$(x)_n = \sum_{k=o}^{n} \}^n_k\{ \; x^k \; ,$$

donde $(x)_n = x(x-1)(x-2)\ldots.(x-n+1)$.

Los polinomios de Bell Y_n se definen mediante la fórmula

$$Y_n(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \sum_{a_1+2a_2+\ldots na_n=n} \frac{n!}{a_1!\; a_2!\ldots a_n!} \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{i!}\right)^i$$

Resultados

Denotemos por G_k el conjunto de todos los grafos marcados de orden k.

Teorema. Es válida la siguiente expresión para el número de familias no disjuntas:

$$T_{m,n} = ((-1)^n(n-1)! + \sum_{k=1}^{n} \}^n_k\{ \sum_{G\in\mathcal{G}_k} (-1)^{|G|}\gamma^m(G))/n! \; .$$

Sea G''_k el conjunto de todos los grafos conectados no isomorfos de orden k y sea $\ell(G)$ el número de grafos marcados isomorfos a G.

Corolario 1.

$$T_{m,n} = \left[(-1)^n(n-1)! + \sum_{k=o}^{n} \}^n_k\{ \; Y_n\left(T''_{m,1},\ldots,T''_{m,n}\right)\right]/n! \quad ,$$

donde Y_n es el polinomio de Bell y

$$T_{m,n} = \sum_{G\in G''_n} (-1)^{|G|}\ell(G)\gamma^m(G).$$

Corolario 2.

$$T_{m,1} = 2^m - 1$$

$$T_{m,2} = (4^m - 3^m - 2^m + 1)/2!$$

$$T_{m,3} = (8^m - 3.6^m + 3.5^m - 4.4^m + 3.3^m + 2.2^m - 2)/3!$$

$$T_{m,4} = (16^m - 6.12^m + 12.10^m - 9^m - 22.8^m + 15.7^m + 12.6^m -$$

$$- 17.5^m + 17.4^m - 11.3^m - 6.2^m + 6)/4! \ .$$

Demostraciones

Si $B \subseteq 2^M$ es una familia tal que $|B|=n$ diremos que B es una n-familia. Si U es un conjunto, entonces por U^n_n se denota la enésima potencia cartesiana del conjunto U. Sea $\tilde{B} \in (2^m)$ un n-vector de subconjuntos del conjunto N. Si las coordenadas cumplen la condición (1) entonces llamaremos a B n-vector no disjunto. Al número de n-vectores no disjuntos del conjunto M lo denotaremos por $T_{m,n}$.

Lema 1.

$$T_{m,n} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} T'_{m,k} \ \}{n \atop k}\{ \ .$$

Demostración. Evidentemente

$$T'_{m,n} = \sum_{k=1}^{n} T'_{m,n}(k)$$

donde $T_{m,n}(k)$ es el número de vectores no disjuntos que tienen exactamente k coordenadas distintas entre sí. Veamos k subconjuntos $\alpha_1 \ \alpha_2, \dots, \alpha_k$ de M que son las coordenadas distintas entre sí del vector $\tilde{B}$. Está claro que el número de fórmulas para escoger $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ de tal manera que B sea no disjunto, es igual a $T_{m,n}$. Por otro lado, el vector $\tilde{B}=(B_1 \dots B_n)$ en el cual sus k coordenadas distintas entre sí son iguales a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ respectivamente, se puede considerar como un arreglo de m objetos desiguales en k células desiguales con la condición de que ninguna célula este vacía. Se conoce (véase [4]) que el número de tales arreglos es igual a $k!\{{n \atop k}\}$. Por lo tanto tenemos que

$$T'_{m,n} = \sum_{k=1}^{n} T_{m,k} \ k!\{{n \atop k}\}$$

De aquí y de la conocida fórmula (véase [4])

$$\sum_{k=1}^{n} \{{n \atop k}\}\}{k \atop m}\{ = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0, n \neq m \\ 1, n = m \end{cases}$$

se deduce lo que se quiere demostrar.

Lema 2.

La magnitud γ (G) es igual al número de ceros de la función de Boole:

$$f_H(\tilde{x}_n) = f_H(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\{i,j\}\in H} x_i x_j$$

Demostración

Por un lado, cada cero de la función f_H, por definición de las operaciones V y Λ, es una aplicación $g: N \to \{0,1\}$ tal que de $\{i,j\}\in H$ y $g(i)=1$ implica que $g(j) = 0$. Por el otro, cada una de estas aplicaciones define un conjunto de vértices $\{i \in N \mid g(i) = 1\}$, el cual por definición de g, es independiente.

Recíprocamente, cada conjunto independiente I de vértices del grafo G define una aplicación g(i) igual a 1 si y sólo si $i \in I$. Al mismo tiempo esta aplicación es un cero de la función f_H. Lo que queda demostrado.

Demostración del teorema:

Evidentemente $T'_{m,1} = 2^m-1$. Por esto en virtud del lema 1 y considerando que $\}_1^n\{ = (-1)^{n-1}(n-1)!$, tenemos que

$$T_{m,n} = \left((2^m-1)(-1)^{n-1}(n-1)! + \sum_{k=2}^{n} T'_{m,k}\}_k^n\{\right)/n!$$

teniendo en cuenta que

$$\sum_{G\in G_1} (-1)^{|G|}\gamma^m(G) = 2^m$$

nos queda por demostrar que

$$T'_{m,n} = \sum_{G\in \phi_k} (-1)^{|G|}\gamma^{(m)}(G) \quad , \; n \geq 2. \qquad (2)$$

Sea B un n-vector. Veamos su matriz de incidencia $\psi(\tilde{B})$

$$\psi(\tilde{B}) = \| \psi_{i,j} \| , \qquad \psi_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in B_i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La correspondencia $\tilde{B} \to \psi(\tilde{B})$ es biunívoca.

Sea $J(B) = (j_0, j_1, \ldots, j_{2^n-1})$ un vector de números cuya i-ésima coordenada es igual al número de columnas en $\psi(\tilde{B})$ que coinciden con la escritura binaria en n bit del número i.

Denotemos $$N^{\underline{o}}(\tilde{q}_n) = N^{\underline{o}}(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{k=1}^{n} q_k\, 2^{k-1}$$

Sea Q_n el espacio vectorial de n dimensiones sobre el campo de Galois GF(2).

Sea $\tilde{k}_{2^n} = (k_0, k_1, \ldots, k_{2^n-1})$ un vector de números naturales. ¿Cuándo existe un n-vector de suconjuntos $\tilde{B}$ tal que $\tilde{k}_{2^n} = J(\tilde{B})$?. Evidentemente la respuesta es: cuando $k_0 + k_1 \ldots + k_{2^n-1} = m$.

¿Cuántos vectores B cumplen que $\tilde{k}_{2^n} = J(\tilde{B})$?. Este número es igual al número de m distintos objetos en 2^n células diferentes entre sí cuando las células deben contener $k_0, k_1, \ldots k_{2^n-2}, k_{2^n-1}$ objetos respectivamente y este número es igual al coeficiente polinomial

$$\frac{m!}{k_0!\ k_1!\ \ldots\ k_{2^n-1}!}$$

¿Cuándo existe un n-vector no disjunto $\tilde{B}$ tal que $\tilde{k}_{2^n} = J(\tilde{B})$?. En primer lugar (véase la respuesta a la primera pregunta) es necesario que $k_0 + \ldots + k_{2^n-1} = m$. La condición necesaria y suficiente no es trivial y necesita demostración. Demostremos que $k_0 + \ldots + k_{2^n-1} = m$ y la certeza de la proposición

$$L(k_0, \ldots, k_{2^n-1}) = \bigwedge_{\{i,j\} \in \binom{N}{2}} \ \bigvee_{\substack{\tilde{q}_n \in Q_n \\ q_i q_j = 1}} k_{w^0(\tilde{q}_n)} \geq 1 \qquad (4)$$

donde $\binom{N}{2}$ es el conjunto de todos los pares no ordenados de elementos desiguales de N, son las condiciones necesarias y suficientes buscadas.

En realidad el vector $\tilde{B}$ es no disjunto si y sólo si $(n \geq 2)$ cualesquiera sean los números de filas i y j de la matriz $\psi(\tilde{B})$, se encuentra un número de columna ℓ el cual cumple que $\psi_{i,\ell} = \psi_{j,\ell} = 1$

Veamos la expresión

$$\bigvee_{\substack{\tilde{q}_n \in Q_n \\ q_i q_j = 1}} \left(k_{w^0(q_n)} \geq 1\right) \qquad (5)$$

La proposición $q_i q_j$ es cierta si y sólo si $q_i = q_j = 1$ y por esto (5) es la disjunción de las proporciones $(k_{t_1} \geq 1), (k_{t_2} \geq 1), \ldots, (k_{t_r} \geq 1)$ donde los índices determinan las columnas que tienen unos en las filas i y j. En otras palabras (5) determina la existencia de ℓ para i y j. Tomando la conjunción por todos los pares no ordenados de filas obtenemos (4). Aclaremos que (4) es válida solamente cuando $n \geq 2$.

De (3) y (4) se desprende que

$$T'_{m,n} = \Theta_{m,n}(L(k_0,\dots,k_{2^n-1})) = \sum_{\substack{\overline{k_0+k_1+\dots+k_{2^n-1}=m} \\ L(k_0,k_1,\dots,k_{2^n-1})}} \frac{m!}{k_0!\dots k_{2^n-1}} =$$

$$= \Theta_{m,n}\Big(\bigwedge_{\{i,j\}\in\binom{N}{2}} \bigvee_{\substack{\tilde{q}_n\in Q_n \\ q_iq_j=1}} (k_{w^0(q_n)} \geq 1)\Big).$$

Transformemos esta fórmula utilizando el principio de inclusión-exclusión (véase [4])

$$T_{m,n} = \sum_{H\subseteq\binom{N}{2}} (-1)^{|H|}\Theta_{m,n}\Big(\bigwedge_{\{i,j\}\in H} \overline{\bigvee_{\substack{q_n\in Q_n \\ q_iq_0=1}} (k_{w^0(\tilde{q}_n)} \geq 1)}\Big) =$$

$$= \sum_{H\in\binom{N}{2}} (-1)^{|H|}\Theta_{m,n}\Big(\bigwedge_{\{i,j\}\in H} \bigwedge_{\tilde{q}_n\in Q_n} (k_{w^0(\tilde{q}_n)} = 0)\Big) =$$

$$= \sum_{H\in\binom{N}{2}} (-1)^{|H|}\Theta_{m,n}\Big(\bigwedge_{\substack{\tilde{q}_n\in Q_n \\ f_H(\tilde{q}_n)=1}} (k_{w^0(\tilde{q}_n)} = 0)\Big). \qquad (6)$$

Por el lema 2 el número de ceros de la función f_H es igual a $\gamma(G)$. Por esto en (6) debajo de la suma $\Theta_{m,n}$ hay $2^n-\gamma(G)$ restricciones del tipo $k_i=0$ y por lo tanto en virtud del teorema obtendremos

$$\Theta_{m,n}\Big(\bigwedge_{\substack{\tilde{q}_n\in Q_n \\ f_H(\tilde{q}_n)=1}} (k_{w^0(\tilde{q}_n)} =)\Big) = (2^n-(2^n-\gamma(G))^m = \gamma^m(G) ,$$

lo que junto a (6) y (2) demuestra el teorema.

Demostración del corolario 1.

La demostración se deduce inmediatamente del teorema, los resultados de Rota [5] y del hecho que $\gamma(G)$ es una función multiplicativa.

Demostración del corolario 2.

La demostración en virtud del corolario 1 se reduce a examinar los 10 grafos conectados no isomorfos de orden no menor que 5 y la obviamos.

BIBLIOGRAFÍA

1. Erdës, P.; D.J.Kleitman

Extremal problems among subset of a set. Discrete Math., 8 (1974), pp. 281-294.

2. Kleitman D.J.
Extremal hyporgraph problems. J.London Math. Soc., # 38, 1979, pp. 44-65.

3. Harary F.
Graph Theory Addison Wesley, New York, 1969.

4. Riordan J.
An introduction to combinatorial analysis. John Wiley & Sons, New York, 1958.

5. Doubilot P., G.C.Rota, R.Stanley
On the foundation of combinatorial theory. VI: The idea of generating function. Proceeding of the Sixth Berkely Simposium on Matematical Statistic and Probability, V. II, University of California Press, 1972, pp. 267-318.

Recibido: 21 de enero de 1983.