REVISTA INVESTIGACIÓN OPERACIONAL Vol. VIII, No. 1, 1987

Complejidad computacional de problemas de existencia de pareos en grafos

Jorge L. Arocha, Instituto de Matemática Cibernética y Computación, Academia de Ciencias de Cuba

RESUMEN

Se estudian desde el punto de vista algorítmico problemas de existencia de pareos con propiedades especiales. Se establece la NP-completitud de ciertos problemas de este tipo y la solubilidad polinomial de otros. Se muestra la aplicabilidad de uno de estos resultados a la confección de horarios docentes.

ABSTRACT

The existence of matchings with special properties are studied from the algorithmic point of view. The NP-completeness of some of these problems and the polinomial solutions of others are set up. An application of one of these results to the confection of rosters is presented.

INTRODUCCIÓN

Sea G = (V,E) un grafo. Un pareo de G es por definición un subconjunto $P \subseteq E$ de aristas tal que:

a) $\forall\, p_1, p_2 \in P,\ p_1 \cap p_2 = \emptyset$

b) $\forall\, v \in V\ \exists\, p \in P,\ v \in p.$

El problema de determinar si un grafo tiene o no un pareo se resuelve bien algorítmicamente en $0(|V|^3)$ operaciones.

Sea $\Pi = (B_1, B_2, \ldots, B_t)$ una partición de E y $\varphi : \Pi \longrightarrow N$ un peso asociado a cada bloque de Π. Consideremos el siguiente problema: dados G y, determinar si G tiene o no un pareo P tal que:

$$|P \cap B_i| \leqslant \varphi(B_i) \ , \ i \in \{1,\ldots,t\} \qquad (1)$$

En la sección 1 demostramos que este problema es NP-completo incluso cuando G es bipartido balanceado y φ es la función constante 1. En la sección 2 mostramos que si además G cumple la propiedad de las cuerdas, entonces el problema se reduce a uno de flujo en cierta red. Se muestra la aplicabilidad de este resultado a la confección de horarios docentes. En la última sección se muestra que el problema general cuanto t es fijo, se resuelve polinomialmente con un algoritmo de tipo Las Vegas.

1. CASO BIPARTIDO

Sea $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartido balanceado ($|V_1| = |V_2|$).

Sean σ_1 y σ_2 particiones de V_1 y V_2 respectivamente.

Definamos la partición Π de E de la siguiente manera:

$$\Pi(a,b) = \Pi(c,d) \iff \sigma_1(a) = \sigma_1(c) \wedge \sigma_2(b) = \sigma_2(d),$$

diremos que Π es inducida por σ_1 y σ_2.

PROPOSICION 1. El problema de determinar dado G que es bipartido balanceado y Π inducida por σ_1 y σ_2 si G tiene o no un pareo P tal que:

$$\forall B \in \Pi, \ |P \cap B| \leqslant 1 \qquad (2)$$

es NP-completo.

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente dicho problema pertenece a NP ya que dado un conjunto $P \subseteq E$ es fácil comprobar si este es o no un pareo que cumple la condición (2).

Demostremos que el problema es NP-duro. Para esto reduciremos el problema de la satisfabilidad (SAT) a nuestro problema. Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ el conjunto de variables y $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ el conjunto de disyunciones elementales de un caso individual arbitrario del problema SAT. Construyamos el grafo bipartido $G(A \cup B, E)$ en dos partes.

En la primera parte para cada variable x_i y disyunción elemental d_j definiremos los vértices $a_{ij} \in A$, $u_{ij} \in A$, $\hat{u}_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$ y $c_{ij} \in B$. Pongamos cada c_{ij} unido a u_{ij} y a $\hat{u}_{ij}$ por aristas. Pongamos además cada

a_{ij} unido por aristas a b_{ij} y a $b_{i(j-1)\bmod(m)}$. Sean $\{a_{ij}, u_{ij}, \tilde{u}_{i(j-1)\bmod(m)}\}$ y $\{b_{ij}, c_{ij}\}$ bloques de σ_A y σ_B respectivamente. Todos los demás bloques de σ_A y σ_B serán triviales, o sea, formados por un solo vértice.

La primera parte de la construcción está representada gráficamente para m=3 e i fijo, en la figura 1. En esta, las líneas de puntos representan los bloques de A y B.

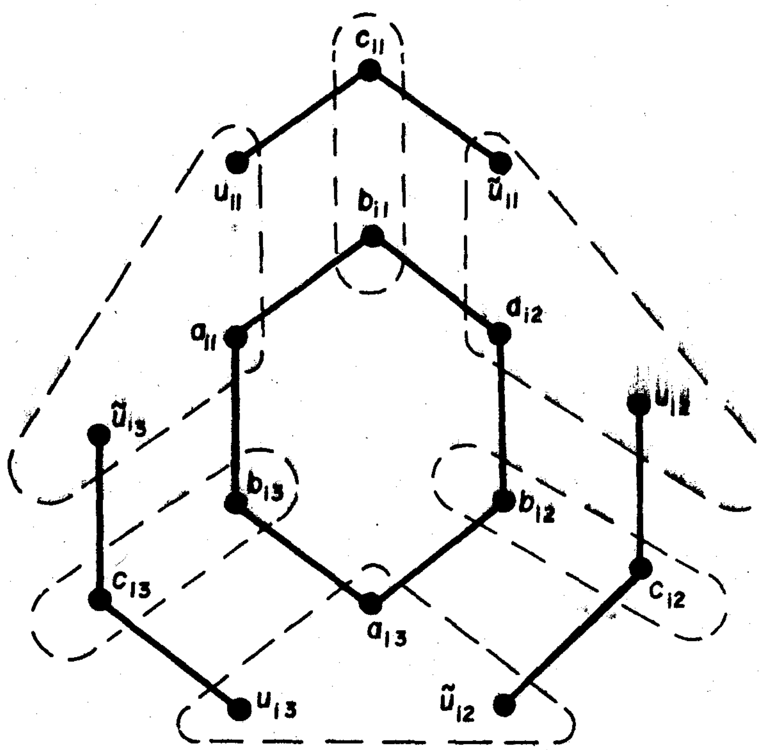

FIG.1

Puesto que los vértices a_{ij}, b_{ij} y c_{ij} no se unirán a otros vértices por aristas es fácil ver que, dado un i fijo, para el pareo deseado existen dos posibilidades: o todos los c_{ij} se "parean" con los u_{ij} o todos los c_{ij} se "parean" con los $\tilde{u}_{ij}$. Este hecho lo interpretaremos como que la variable x_i toma el valor "falso" o "verdadero" respectivamente.

Pasemos a la segunda parte de la construcción. Pongamos para cada disyunción elemental $d_j \in D$ un vértice $h_j \in B$. Si $x_i \in d_j$ pongamos una arista entre u_{ij} y d_j. Si $\bar{x}_i \in d_j$ entonces pondremos una arista entre α_{ij} y d_j. Para finalizar por cada $j \in \{1,\dots,m\}$ definiremos n-1 vértices $g_{kj} \in B$ los cuales estarán unidos por aristas a todos vértices u_{ij} y α_{ij}.

Un ejemplo de esta segunda parte de la construcción se representa gráficamente en la figura 2, en la cual $d_j = x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$.

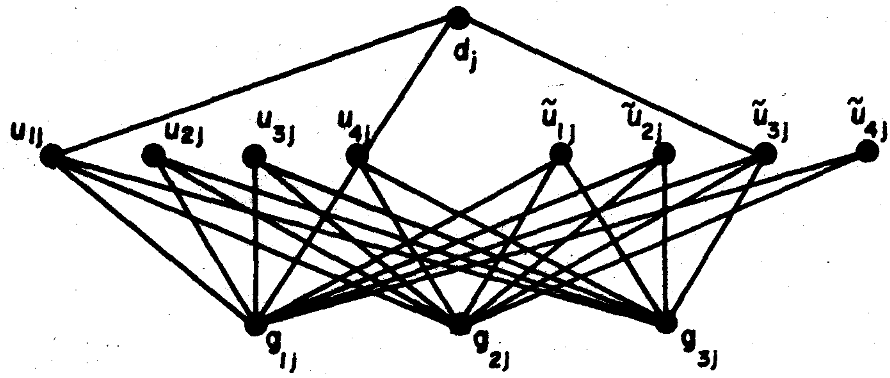

FIG. 2

Es fácil de probar que el problema SAT es satisfacible si y sólo si el grafo construido tiene un pareo tal que se cumple (2). Además la reducción es polinomial puesto que se construyen $O(nm)$ vértices y $O(n^2m^2)$ aristas. ∎

COROLARIO. El problema anterior es NP-completo incluso cuando el cardinal de los bloques de σ_A y σ_B no sobrepasa 3.

Nota. Es posible demostrar la proposición anterior utilizando en la primera parte la construcción más sencilla mostrada en la figura 3 para m=4. Sin embargo, esta construcción no limita el cardinal de los bloques de las particiones de los vértices.

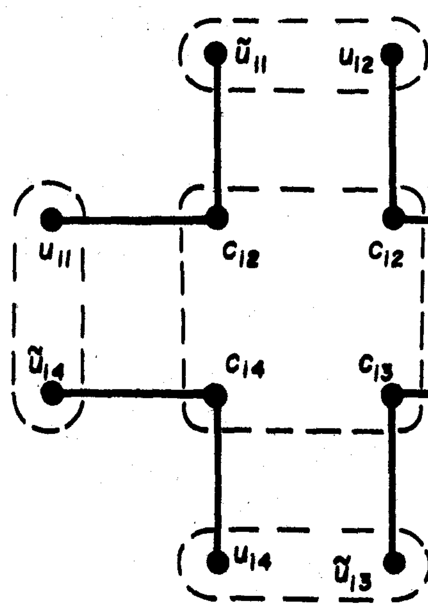

FIG. 3

2. HORARIOS

Sean como antes $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartido y Π la partición inducida respecto a σ_1 y σ_2. Diremos que G cumple la propiedad de las cuerdas si y sólo si:

$$\left.\begin{array}{c}(a,b) \in E \\ (c,d) \in E \\ \Pi(a,b) = \Pi(c,d)\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}(a,d) \in E \\ (c,b) \in E\end{array}\right.$$

PROPOSICIÓN 2. El problema de determinar dado $G = (V_1 \cup V_2, E)$ que cumple la propiedad de las cuerdas y Π inducida por σ_1 y σ_2 si G tiene o no un pareo P tal que se cumple la propiedad (2), se resuelve polinomialmente.

Demostración. Construyamos el grafo orientado $\tilde{G} = (A, X)$, siendo

$A = \{s\} \cup V_1 \cup \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup V_2 \cup \{V\}$ y

$X = (\{s\} \times V_1) \cup X_1 \cup R \cup X_2 \cup (V_2 \times \{v\})$;

donde Π_1 y Π_2 son copias de Π,

$R = \{(B,B): B \in \Pi\} \subseteq \Pi_1 \times \Pi_2$,

$X_1 = \{(a,B) \in V_1 \times \Pi_1$: a incide a cierta arista de $B\}$ y

$X_2 = \{(B,b) \in \Pi_2 \times V_2$: b incide a cierta arista de B .

Consideremos el problema del flujo máximo de s a v con función de capacidad constante e igual a 1 en todos los arcos. Si $f: X \to \mathbb{N}$ es un flujo entonces utilizaremos la notación:

$$|f| = \sum_{a \in V_1} f(s,a) = \sum_{b \in V_2} f(b,v).$$

Es claro que cualquiera sea f tendremos $|f| \leq |V_1|$.

Si G tiene un pareo P que cumple la condición (2) entonces pondremos:

$$f_P(e) = \begin{cases} 1 \text{ si } e \ \{s\} \times V_1 \cup V_2 \times \{v\} \text{ o} \\ \quad e = (a,B) \text{ y } B \cap P \neq 0 \text{ o} \\ \quad e = (B,B) \text{ y } B \cap P \neq 0 \text{ o} \\ \quad e = (B,b) \text{ y } B \cap P \neq 0 \ ; \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil probar que f_P es flujo máximo en $\tilde{G}$ y además $|f_P| = |V_1| = |V_2|$.

Recíprocamente, sea f el fl-jo máximo de $\tilde{G}$ y supongamos que $|f| = |V_1| = |V_2|$. Pongamos

$$P_f = \{(a,b) \in E: \exists B \in \Pi,\ f(a,B) = f(B,B) = f(B,b) = 1\}.$$

Es fácil de probar, utilizando que G cumple la propiedad de las cuerdas, que P_f es un pareo de G que cumple (2).

Luego G tiene un pareo que cumple (2) si y solo si el flujo maximal de G cumple que $|f| = |V_1| = |V_2|$. Queda por señalar que la construcción de G es evidentemente polinomial. ■

Mostremos ahora como la proposición 2 es aplicable a la búsqueda de horarios docentes.

Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ asignaturas que deben impartirse con una frecuencia $h_1, h_2, \ldots, h_n$ por cada período de tiempo Δt a un grupo determinado de estudiantes. Sean $a_1, \ldots, a_m$ los días hábiles en el tiempo Δt. Sean $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{j_i}}$ los turnos del i-ésimo día hábil. Sea $\delta_{lik}=1$ si la asignatura P_l se puede impartir en el turno k del i-ésimo día hábil y $\delta_{lik}=0$ en otro caso. Se requiere decidir si existe o no un horario docente de tal manera que se cumplan las restricciones δ, cada asignatura se imparta con su frecuencia exacta y en un mismo día hábil no se imparta más de una vez la misma asignatura.

PROPOSICIÓN 3. El problema de los horarios docentes se resuelve polinomialmente.

Demostración. Construyamos el grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ donde:

$$A = \{(p_i, l) : i \in \{1,\ldots,n\},\ l \in \{1,\ldots,h_i\}\},$$

$$B = \{a_{il} : i \in \{1,\ldots,m\},\ l \in \{1,\ldots,j_i\}\} \text{ y}$$

$$E = \{((p_i,l), a_{jk}) : \delta_{ijk} = 1\};$$

con las particiones $\theta_A(p_i,l) = \theta_A(p_{i'},l') \iff i=i'$ y

$$\theta_B(a_{il}) = \theta_B(a_{jk}) \iff i=j.$$

El grafo G cumple la propiedad de las cuerdas por lo que introduciendo asignaturas ficticias suficientes se puede aplicar la proposición anterior.
■

Nota. El problema de los horarios docentes se puede resolver más eficientemente utilizando una construcción parecida a la de la proposición 2.

3. CASO GENERAL

Sea $G = (V,E)$ un grafo, Π una partición de E y $\varphi: \Pi \to \mathbb{N}$. El problema de determinar si G tiene o no un pareo que cumple la condición (1) es por la proposición 1 NP-completo en el sentido fuerte (véase [1]). Sin embargo, si fijamos como parámetro a $t = |\Pi|$ se puede obtener un algoritmo en cierto sentido polinomial para la resolución de este problema.

Recordemos que un algoritmo de tipo Las Vegas (véase [2]) es uno del siguiente tipo. Sea W el conjunto de los datos posibles y $T:W \to \{0,1\}$ el predicado que define el problema de decisión. En un algoritmo de tipo Las Vegas dado $w \in W$ a la salida obtendremos que o $T(w) = 0$ o que $\mathrm{Prob}(T(w) = 0) \leq L$ donde L es una constante suficientemente pequeña, por ejemplo $L = 1/2$. Si ejecutamos independientemente k veces este algoritmo obtendremos que $\mathrm{Prob}(T(w) = 0) \leq 2^{-k}$.

Nos será más cómodo sustituir la condición (1) por

$$\forall B \in \Pi, \ |P \cap B| = \varphi(B) \tag{3}$$

la cual es más restrictiva ya que si podemos resolver el problema con la condición (2) entonces recorriendo todas las variantes que son menos que $|V|^{2t}$ obtendremos una solución polinomial (recuérdese que t es fijo) para el problema con la condición (1).

PROPOSICIÓN 4. Sea t un número natural fijo. El problema algorítmico consistente en que dado un grafo $G = (V,E)$, una partición Π de E tal que: $|\Pi| = t$ y una aplicación $\varphi : \Pi \to \mathbb{N}$, decidir si existe o no un pareo de G que cumpla la condición (3); se resuelve mediante un algoritmo de tipo Las Vegas de una complejidad polinomial en $n = |V|$. Más exactamente de una complejidad del orden $O(n^{3(t+1)})$.

Demostración. La demostración consiste en la construcción del algoritmo deseado.

Sea $\Pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_t\}$. Si $n = |V|$ es impar entonces G no tiene ningún pareo. Sea $n = 2m$. Construyamos la matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} y_l & \text{si } \{i,j\} \in B_l, \\ 0 & \text{si } \{i,j\} \notin E. \end{cases}$$

Sea $h = \max_{B \in \Pi} \varphi(B)$. Sea P un número primo tal que $hn < p \leq 2hn+1$ y construyamos la matriz antisimétrica $B = (b_{ij})_{n \times n}$, donde los elementos b_{ij} pertenecen al anillo $\mathbb{Z}_p$ y cada uno de los elementos del triángulo superior de B se escogen aleatoria e independientemente con distribución uniforme.

Consideremos la siguiente expresión en el anillo $\mathbb{Z}_p$:

$$S(B) = \sum_{Y=1}^{p-1} \sum_{Y=1}^{p-1} \cdots \sum_{Y=1}^{p-1} \mathrm{Pf}(B * A) \prod_{i=1}^{t} Y_i^{-\varphi(B_i)}$$, donde $*$ es el producto de Hadamar de matrices y $\mathrm{Pf}(W)$ es el pfaffiano de la matriz antisimétrica de orden par W (véase [3]).

Sin perder generalidad supondremos que $V = \{1,\ldots,n\}$. Es fácil de ver por la definición de pfaffiano que:

$$S(B) = \sum_{P \in \mathbb{P}} e_P\, b_{i_1 j_1} \cdots b_{i_m j_m} \prod_{r=1}^{t} \sum_{Y_r=1}^{p-1} Y_r^{|P \cap B_r| - \varphi(B_r)}$$

donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de todos los pareos de G,

$P = \{\{i_1,j_1\},\ldots,\{i_m,j_m\}\}$, $i_k < j_k$, $i_k < i_{k+1}$, $j_k < j_{k+1}$ y e_P es el signo de la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & & i_m & j_m \end{pmatrix}$$

Como evidentemente $|P \cap B_r| - \varphi(B_r) < p-1$ entonces

$$\sum_{Y_r=1}^{p-1} Y_r^{|P \cap B_r| - \varphi(B_r)} = \begin{cases} -1 & \text{si } |P \cap B_r| = \varphi(B_r) , \\ 0 & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

luego

$$S(B) = - \sum_{\substack{P \in \mathbb{P} \\ |P \cap B_r| = \varphi(B_r)}} e_P\, b_{i_1 j_1} \cdots b_{i_m j_m}$$

con lo que se demuestra que S es un polinomio de $(n-1)(n-2)/2$ variables aleatorias (definidas por el triángulo superior de B) en el anillo Z_p el cual cumple la propiedad de ser idénticamente igual a cero si y sólo si G no posee un pareo que cumpla la condición (3).

El cálculo de S evaluado en una matriz fija B se realiza fácilmente pues $Pf(W) = \sqrt{\det(W)}$ para cualquier matriz W que sea antisimétrica y de orden par. Luego para calcular S(B) utilizando el clásico algoritmo de Gauss para los determinantes en el anillo Z_p y considerando la raíz cuadrada como operación elemental, se necesitan una cantidad de operaciones del orden $(hn)^t n^2 (n+\log h)$ que es menor que $n^{3(t+1)}$ puesto que $h < n^2$.

Además es conocido (véase [4]) que si S evaluado en una matriz fija B es cero entonces la probabilidad de que S no sea idénticamente nulo es menor que $1-1/2h$.

Con todo lo anterior queda fundamentado el siguiente algoritmo de tipo Las Vegas:

1) Escoger independientemente uno del otro y con distribución uniforme en el anillo Z_p los valores de las variables b_{ij} para $1 \leq i < j \leq n$.

2) Calcular en Z_p el polinomio S evaluado en la matriz escogida en el punto anterior.

3) Si S(B) $\neq$ 0 entonces el pareo P que cumple la condición (3) existe.

4) Si por el contrario S(B) = 0 entonces la probabilidad de que el pareo exista es menor que 1/2h.

∎

Nota. La misma construcción usada en la demostración de la proposición anterior puede ser utilizada para resolver el problema más general cuando a las aristas de G les están asignados pesos y se exige que el peso total de cada bloque de la partición sea igual a cierta magnitud dada. Sin embargo, en este caso el algoritmo no será polinomial sino solamente pseudo-polinomial (véase [1]) puesto que la mayoración $h<n^2$ no será válida en general. Esta construcción no es más que una ligera modificación de la utilizada por Jachian [5] para resolver el problema más clásico del cálculo de pareos en grafos de peso fijo.

AGRADECIMIENTOS

Le agradezco a E. Morgado y L. García el planteamiento del problema de horarios el cual fue el que motivó este trabajo. Agradezco a L. Jachian el haberme introducido en la Teoría de Complejidad de Algoritmos y su ayuda en la obtención de estos resultados.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Garey, M.P. and D.S. Johnson
Computers and Intractability, Freeman and Company, San Francisco, 1979.

[2] Babai, L.
Monte-Carlo algorithms in graph isomorphism testing *Preprint Univ. Toronto*, 1979.

[3] *Enciclopedia de Matemáticas.* Tomos 1-5, Editorial Enciclopedia Soviética, Moscú, 1977-1985 (en ruso).

[4] Chafarevitch, I.R. et Z.I. Borevitch
Theorie des nombres, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[5] Jachian, L.G.
Comunicación personal, 1985.