

Índice General

Introducción	2
La tensión: origen y problemas	2
Breve resumen del trabajo desarrollado	3
1 Preliminares	6
1.1 Definiciones y resultados básicos	6
2 Dos familias de 3-árboles mínimos	12
2.1 Duplicando 3-árboles	12
2.2 El caso $3 \cdot 2^k + 1$	16
3 El caso 2 mod 3	19
3.1 La construcción	19
4 3-cadenas tensas	24
4.1 El caso 3 mod 6	24
4.2 El caso 0 mod 6	33
5 Otra vez el caso 0 mod 6	46
5.1 Una importante 3-gráfica no tensa	46
5.2 El caso 0 mod 12	48
5.3 El caso 6 mod 12	55
5.3.1 El caso especial de orden 18	62
6 El caso 1 mod 3	66
6.1 Un buen candidato a 3-árbol mínimo	66
6.2 El caso 4 mod 6	68
6.3 El caso 1 mod 12	71
6.4 El caso 7 mod 12	76
6.4.1 El caso especial de orden 19	79

Introducción

Procederemos a introducir el importante tema de la tensión en k -gráficas y daremos un breve resumen de los principales resultados obtenidos en este trabajo.

La tensión: origen y problemas

La *tensión en k -gráficas* pretende generalizar de manera natural una de las bien conocidas caracterizaciones de la conexidad en gráficas, a saber: una gráfica es conexa si y sólo si, independientemente de cómo coloreemos sus vértices con dos colores, siempre aparece una arista bicoloreada.

Así pues, una *k -gráfica* (hipergráfica regular con aristas de tamaño k) es tensa si y sólo si independientemente de cómo coloreemos sus vértices con k colores, siempre aparece una arista k -coloreada.

La tensión se estudia por primera vez en [9] (para $k = 3$) y fué redescubierta en [2]. En lo adelante sólo nos ocuparemos del caso en que $k = 3$.

Una 3-gráfica tensa es *3-árbol* si al eliminar cualquiera de sus ternas, la 3-gráfica resultante deja de ser tensa. Una vez más, se puede apreciar que los 3-árboles son una extensión del concepto de árboles ya conocidos. Sin embargo, a diferencia de éstos, los 3-árboles pueden tener diferente cantidad de ternas para un mismo número de vértices.

Este hecho conlleva a plantearse el estudio de los 3-árboles con un mínimo número de ternas. De los resultados de [6] sabemos que el máximo número de ternas en un 3-árbol con n vértices es $\binom{n-1}{2}$.

No es difícil comprobar que el mínimo número de ternas de tales 3-árboles es mayor o igual que $\left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil$. En [2] se demuestra que esta cota es exacta

para todo $n = \frac{p-1}{2}$ donde p es primo. En dicho caso se prueba que independientemente de cómo coloreemos con 3 colores los elementos de $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ (el grupo multiplicativo del campo finito de los residuos módulo un número primo p) existe una solución de la ecuación $x + y = z$ con colores distintos. En [7] se da una caracterización completa de las ecuaciones del tipo $ax + by = cz$ que cumplen la propiedad enunciada, con $a, b, c \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.

Breve resumen del trabajo desarrollado

El objetivo principal de nuestro trabajo es probar que la cota inferior antes mencionada para el tamaño de un 3-árbol mínimo es exacta para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello ofrecemos explícitamente, 3-árboles con el tamaño requerido.

En el capítulo 1 se sientan las bases para la comprensión del texto.

En el capítulo 2 proponemos dos métodos para construir 3-árboles mínimos que constituyen la aplicación más sencilla de algunas de las ideas que se desarrollan a lo largo de este trabajo.

Con el primer método (al que llamaremos método de duplicación) se construye una familia infinita de 3-árboles de orden $3 \cdot 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ haciéndose patentes la sencillez y elegancia de los argumentos inductivos. La segunda construcción constituye un primer acercamiento al método general que se desarrolla en el capítulo 6. A partir de la familia de 3-árboles construidos con el primer método construimos 3-árboles mínimos de orden $3 \cdot 2^k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Estos constituyen la primera familia infinita que se conoce para el caso en que el número de vértices es congruente con 1 mod 6.

En [9] Sterboul construye 3-árboles mínimos de orden $n \equiv 2 \pmod{3}$, desafortunadamente sus demostraciones no son claras y pasan por alto detalles importantes. En el capítulo 3 ofrecemos una prueba completa de este caso, usando la construcción básica y las ideas principales de [9].

Para continuar, es importante conocer que la traza de un vértice v en una 3-gráfica $G = (V, E)$ es la gráfica $Tr_G(v) = (V \setminus \{v\}, E')$ donde $\{x, y\} \in E'$ si y sólo si $\{v, x, y\} \in E$.

Sucede que para un 3-árbol de orden n y tamaño $\left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil$, si $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$

entonces todas las trazas son árboles; en otro caso una de las trazas contiene un ciclo y el resto son árboles.

Para el caso particular en que todas las trazas son cadenas, a la 3-gráfica en cuestión la llamaremos *3-cadena*. Éstas poseen por sí mismas gran interés, independientemente de cómo se comporten con respecto a la tensión: pueden interpretarse como inmersiones de gráficas completas en superficies con frontera.

Contando con esta interpretación topológica de las 3-cadenas, es natural que analicemos con detalle los trabajos de Ringel, White y otros (ver [8]), sobre el número cromático de una superficie cerrada. La solución de este problema consiste esencialmente en encontrar el máximo n tal que la gráfica completa de n vértices puede ser dibujada en la superficie en cuestión. Cuando $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ es necesario construir una 3-gráfica de orden n donde todas las trazas son ciclos (*3-ciclo*). En dicho caso, si extraemos un vértice y todas las ternas que lo contienen, obtenemos una 3-cadena de orden $n - 1$. Hasta el momento no sabemos cómo se comportan con respecto a la tensión estas 3-cadenas.

En el capítulo 4 presentamos un método para construir 3-cadenas tensas de orden $n \equiv 0 \pmod{3}$ (por tanto, 3-árboles mínimos) y se caracterizan las superficies obtenidas de acuerdo a su orientabilidad y al número de componentes de su frontera.

El caso $3 \pmod{6}$ se soluciona a partir de sistemas de ternas de Steiner contruídos con el método de Skolem (ver [1]). Ocurre que para los casos $3, 15 \pmod{18}$ la frontera es conexa, por lo que se puede obtener un 3-ciclo tenso (ver [3]) pegando un cono de triángulos con centro en un nuevo vértice a la frontera de la 3-cadena. Este hecho prueba una conjetura para el mínimo número de ternas en una 3-gráfica 2-tensa (ver [3]), cuando su orden es $n \equiv 4, 16 \pmod{18}$. La construcción utilizada para el caso $0 \pmod{6}$ es una modificación de la que usamos para el caso $3 \pmod{6}$.

En el capítulo 5 ofrecemos otra manera de resolver el caso $0 \pmod{6}$; esta vez inspirada en el método de duplicación desarrollado en el capítulo 2. Dicha construcción será de gran importancia para la solución del caso $1 \pmod{6}$. Para darle claridad a la exposición, se tratan por separado los casos $0 \pmod{12}$ y $6 \pmod{12}$ aunque las ideas generales desarrolladas en ambos, son esencialmente

las mismas. Conviene destacar que en este caso, para simplificar la demostración de la tensión, hacemos uso de 3-gráficas cociente (ver [2]).

Finalmente, en el capítulo 6 tratamos el caso $1 \bmod 3$. Recuerde que aquí todas las trazas son árboles excepto una, que tiene un ciclo. La idea general para solucionar el problema es la siguiente: tomamos un 3-árbol H de orden $n \equiv 0 \bmod 3$ y un ciclo C sobre su conjunto de vértices. Luego, extraemos $\frac{n}{3}$ ternas disjuntas de H y pegamos un cono de ternas con centro en un nuevo vértice al ciclo C , de tal suerte que la traza de todo vértice en la nueva 3-gráfica sea conexa. Esta 3-gráfica con $n + 1$ vértices será nuestra candidata a 3-árbol mínimo.

En el caso $4 \bmod 6$ partimos de las 3-cadenas tensas de orden $n \equiv 3 \bmod 6$ construidas en el capítulo 4 y para resolver el caso $1 \bmod 6$ utilizamos los 3-árboles con $n \equiv 0 \bmod 6$ vértices, construidos en el capítulo 5.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos las definiciones, notaciones y resultados básicos necesarios para la comprensión del trabajo que se desarrollará posteriormente. En la exposición nos apoyaremos fundamentalmente en [2].

1.1 Definiciones y resultados básicos

Una *3-gráfica* es una pareja ordenada de conjuntos $G = (V, E)$. A los elementos de V los denominaremos *vértices*. Los elementos de E son subconjuntos de vértices de cardinalidad 3 a los que denominaremos *ternas* de G . Al cardinal de E le llamaremos *tamaño* de G .

Denotaremos por *frontera* de G a la gráfica $\partial G = (V, \overline{E})$, sus aristas son los pares de vértices que pertenecen exactamente a una de las ternas de G .

Entenderemos por una *coloración* de una 3-gráfica $G = (V, E)$, una función sobreyectiva de V a un conjunto de cardinalidad 3. Sean $e \in E$ y f una coloración de G , diremos que e es *heterocromática* bajo f si las imágenes por f de los vértices de e son distintas dos a dos. Diremos que f es *heterocromática* si alguna terna de G es heterocromática bajo f .

Se dice que una 3-gráfica es *tensa* si y sólo si todas sus coloraciones son heterocromáticas. Una 3-gráfica tensa $G = (V, E)$ es un *3-árbol* si para cualquier terna $e \in E$, la 3-gráfica $G \setminus e = (V, E \setminus \{e\})$ no es tensa.

Es interesante observar que a diferencia de los árboles en gráficas, que tienen el mismo tamaño para un número fijo de vértices, en los 3-árboles esto no ocurre.

Por ejemplo, las 3-gráficas sobre 6 vértices con conjuntos de ternas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 6\}, \\ \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 5, 6\} \end{array} \right\}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \\ \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\} \end{array} \right\}$$

son 3-árboles con 10 y 8 ternas respectivamente sobre el mismo conjunto de vértices.

Sea $G = (V, E)$ una 3-gráfica y X un subconjunto no vacío de V . Definimos la traza de X como la gráfica $Tr_G(X) = (V \setminus X, E_X)$ donde

$$E_X = \{\{v_1, v_2\} \subseteq V \setminus X \mid \exists x \in X, \{v_1, v_2, x\} \in E\}$$

Lema 1.1 $G = (V, E)$ es una 3-gráfica tensa si y sólo si para todo subconjunto no vacío X de V , $Tr_G(X)$ es una gráfica conexa.

Demostración.

(\Rightarrow) Supongamos que existe un conjunto no vacío X de V tal que $Tr_G(X)$ no es conexa, entonces existe $f : V \setminus X \rightarrow \{R, V\}$ que no deja aristas bicromáticas en $Tr_G(X)$. Si coloreamos los vértices de X con el color A obtenemos una coloración de G que no es heterocromática, luego G no es tensa.

(\Leftarrow) Supongamos que G no es tensa y que nuestro caso no es trivial, i.e. $|V| = n \geq 3$, entonces existe una coloración $f : V \rightarrow \{R, V, A\}$ que no es heterocromática.

Sea $X = f^{-1}(A)$, entonces la restricción de f a $V \setminus X$ no puede dejar aristas bicromáticas en $Tr_G(X)$, luego $Tr_G(X)$ no es conexa. ■

Sea $\rho : V \rightarrow V'$ una función sobreyectiva del conjunto de vértices V de la 3-gráfica $G = (V, E)$ en el conjunto V' . La 3-gráfica $G' = (V', E')$ con

$$E' = \{\{v'_1, v'_2, v'_3\} \mid \exists \{v_1, v_2, v_3\} \in E, \rho(v_i) = v'_i, i = 1, \dots, 3\}$$

es llamada el *cociente* de G por ρ , y es denotada por G/ρ .

En este trabajo ρ es el mapeo natural entre un grupo abeliano H y uno de sus subgrupos $S \subseteq H$ y usaremos la notación G/S para el cociente de G por ρ .

Proposición 1.1 *Cocientes de 3-gráficas tensas son tensos.*

Demostración. Si f es una coloración de H/ρ , entonces $f \circ \rho$ es una coloración de H . Como H es tensa, existe una arista $\{v_1, v_2, v_3\}$ heterocromática bajo $f \circ \rho$, luego $\{\rho(v_1), \rho(v_2), \rho(v_3)\}$ es heterocromática bajo f . ■

Graham y Lovász en [6] definen un 3-bosque como una 3-gráfica donde cualquiera de sus ternas es heterocromática bajo alguna coloración que no deja heterocromática a ninguna otra terna. Claramente una 3-gráfica es un 3-árbol si y sólo si es un 3-bosque tenso. En [6], Lovász demostró que el tamaño máximo de un 3-bosque con n vértices es $\binom{n-1}{2}$.

Como ya se observó en el capítulo anterior, nuestro objetivo es el estudio del tamaño mínimo (Φ_n) de un 3-árbol de n vértices.

Corolario 1.1 $\Phi_n \leq \Phi_{n+1}$.

Demostración. Resulta inmediato de tomar un 3-árbol minimal con $n + 1$ vértices, identificar dos vértices y aplicar la proposición 1.1. ■

Proposición 1.2 $\Phi_n \geq \left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil$.

Demostración. Sea $G = (V, E)$ un 3-árbol minimal sobre el conjunto de vértices V , donde $|V| = n$. Para $v \in V$ denotaremos por $\mathfrak{Val}(v)$ el número de aristas en $Tr_G(v)$. Por el lema 1.1, para cualquier $v \in V$, la traza de v es conexa. Luego, $\mathfrak{Val}(v) \geq n - 2$ y

$$\begin{aligned} 3|E| &= \sum_{v \in V} \mathfrak{Val}(v) \geq n(n-2) \\ |E| &\geq \frac{n(n-2)}{3} \\ \Phi_n &\geq \left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 1.3 $\left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil \leq \Phi_n \leq \binom{n-1}{2}$.

Demostración. Consecuencia directa de la proposición anterior y la cota superior dada por Lovász para 3-árboles con n vértices. ■

Teorema 1.1 $\Phi_n = \left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil$.

Este teorema es el resultado más importante de nuestro trabajo. Los capítulos que siguen están dedicados fundamentalmente a su demostración; para ello construimos de manera explícita, 3-árboles con el tamaño requerido para todo $n \in \mathbb{N}$.

En lo adelante, al referirnos a 3-árboles mínimos de orden n , asumimos que son de tamaño $\left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil$.

La siguiente proposición corrobora el hecho de que no se pueden construir 3-árboles con la simpleza que construimos los árboles usuales.

Proposición 1.4 *Si tenemos un 3-árbol mínimo de orden $n \geq 4$ entonces es imposible construir un 3-árbol mínimo de orden $n + 1$ que lo contenga.*

Demostración. Sea H un 3-árbol mínimo de orden $n \geq 4$. Si $G = (V, E)$ es un 3-árbol mínimo de orden $n + 1$ que contiene a H entonces por el lema 1.1, la traza del vértice extra en G tiene que ser conexa. Luego

$$|E| \geq \left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil + n - 1 > \left\lceil \frac{(n+1)(n-1)}{3} \right\rceil$$

y por tanto, G no tiene el tamaño requerido. ■

Diremos que una 3-gráfica de orden n es *localmente árbol* para el caso $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$ si la traza de cualquiera de sus vértices es un árbol y para el caso $n \equiv 1 \pmod{3}$, si una de las trazas contiene a un ciclo y el resto son árboles.

De acuerdo al lema 1.1 y un argumento de conteo simple, el teorema 1.1 establece la existencia, para todo $n \in \mathbb{N}$, de 3-gráficas tensas de orden n que son localmente árboles. Es por esto que dirigimos nuestros esfuerzos en la construcción de 3-gráficas localmente árboles que van a ser, según el comentario anterior, las candidatas a 3-árboles mínimos.

Por otra parte, los vértices de las 3-gráficas que vamos a construir posteriormente coinciden con los elementos de cierto grupo $(V, +)$. Sea $G = (V, E)$ cualquiera de estas 3-gráficas, pasemos a definir las operaciones más importantes que la involucran. Estas operaciones son muy naturales y no requieren de comentarios.

- Sean $x, y \in V$, entonces $x + y \in V$.
- Sean $x \in V$ y $\{y, z, w\} \in E$, entonces $\{y, z, w\} + x = \{y + x, z + x, w + x\} \in E$.
- Sean $S \subseteq V$ y $F \subseteq E$, entonces $F + S = \{f + s \mid f \in F, s \in S\} \subseteq E$.

Cuando los vértices son los elementos del grupo cíclico \mathbb{Z}_n utilizaremos con frecuencia el producto de un elemento de \mathbb{Z} por una terna en E , que se define como sigue.

- Sean $t \in \mathbb{Z}$ y $\{x, y, z\} \in E$, entonces $t\{x, y, z\} = \{tx, ty, tz\}$.
- Sean $t \in \mathbb{Z}$ y $F \subseteq E$, entonces $tF = \{tf \mid f \in F\}$.

Como se verá posteriormente, la mayoría de las construcciones propuestas son de la forma $G = (\mathbb{Z}_n, F + \mathbb{Z}_n)$ y en ese caso es conveniente que consideremos a \mathbb{Z}_n como los primeros n naturales (incluyendo al cero) dotados de la suma módulo n . Esto nos permitirá utilizar a \mathbb{Z}_n indistintamente como grupo y como subconjunto de los naturales. Con el comentario anterior, la siguiente afirmación no debe ser motivo de confusión:

- Si $n \leq m$ entonces $\mathbb{Z}_n \subseteq \mathbb{Z}_m$.

Los siguientes resultados sobre las simetrías de este tipo de 3-gráficas son obvios y se dan sin demostración.

Proposición 1.5 *Si $G = (\mathbb{Z}_n, F + \mathbb{Z}_n)$ entonces para todo $x \in \mathbb{Z}_n$ la función $g : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ definida como $g(y) = y + x$ es un automorfismo de G .*

Corolario 1.2 *Si $G = (\mathbb{Z}_n, F + \mathbb{Z}_n)$ entonces las trazas de los vértices de G son isomorfas entre sí.*

Un argumento sencillo para determinar el color de un vértice que es usado con frecuencia es el siguiente. Supongamos que $f : V_G \rightarrow \{R, V, A\}$ es una coloración no heterocromática de G ; tenemos dos ternas $e_1 = \{x_1, y_1, z\}$ y $e_2 =$

$\{x_2, y_2, z\}$ de la 3-gráfica G que tienen al vértice z en común y se conocen los colores de x_1, y_1, x_2 y y_2 . Supongamos, además que $f(x_i) \neq f(y_i)$ con $i \in \{1, 2\}$ y que $\{R, V, A\} = \{f(x_i), f(y_i) \mid i \in \{1, 2\}\}$. Bajo estas condiciones se puede deducir el color de z . Utilizaremos la siguiente notación para expresar este hecho, por ejemplo, si

$$f(x_1) = R, f(y_1) = V, f(x_2) = V \text{ y } f(y_2) = A$$

entonces $f(z) = V$ y escribiremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \{x_1, y_1, z\}, e_2 = \{x_2, y_2, z\} \in G \\ f(x_1) = R, f(y_1) = V, f(x_2) = V, f(y_2) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(z) = V$$

Capítulo 2

Dos familias de 3-árboles mínimos

En este capítulo mostramos dos métodos para construir 3-árboles mínimos. Con el primero se construye una familia infinita de 3-árboles de orden $3 \cdot 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ y se hacen patentes la sencillez y elegancia de los argumentos inductivos. La segunda construcción constituye un primer acercamiento al método general desarrollado en el capítulo 6. Usamos la familia de 3-árboles construidos con el primer método para construir 3-árboles mínimos de orden $3 \cdot 2^k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Estos constituyen la primera familia infinita que se conoce para el caso en que el número de vértices es congruente con 1 mod 6.

2.1 Duplicando 3-árboles

Sea $H = (\mathbb{Z}_n, F + \mathbb{Z}_n)$ una 3-gráfica tal que $n \equiv 0 \pmod{3}$. Denotemos por $\mathbb{A}_{2n} = \{5, 11, \dots, 2n - 1\} \subset \mathbb{Z}_{2n}$. Para $a \in \mathbb{A}_{2n}$ consideremos las ternas

$$\alpha_a = \{0, 2, a\}$$

Definiremos la *duplicación* de H como la 3-gráfica

$$H + H = (\mathbb{Z}_{2n}, (2F \cup \{\alpha_a \mid a \in \mathbb{A}_{2n}\}) + \mathbb{Z}_{2n})$$

Diremos que $x \in \mathbb{Z}_n$ es *par* si $x \in \langle 2 \rangle \subseteq \mathbb{Z}_n$ e *impar* en otro caso. Al conjunto de elementos pares lo denotaremos por \mathbb{P}_n y al de los impares por \mathbb{I}_n . Claramente $\mathbb{P}_n \cap \mathbb{I}_n = \emptyset$ y $\mathbb{Z}_n = \mathbb{P}_n \cup \mathbb{I}_n$.

El siguiente resultado sobre la estructura de $H + H$ justifica porqué esta es la duplicación de H .

Lema 2.1 Sean $H_1 = (\mathbb{P}_{2n}, 2F + \mathbb{P}_{2n})$ y $H_2 = (\mathbb{I}_{2n}, 2F + \mathbb{I}_{2n})$. Entonces

i) $H_1, H_2 \subset H + H$.

ii) $H_1 \cap H_2 = \emptyset$.

iii) $H_1 \cong H \cong H_2$.

Demostración. Las afirmaciones i) e ii) son evidentes. Veamos que $H_1 \cong H$. Sea $g_1 : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{P}_{2n}$ definida como: $g(x) = 2x$, para todo $x \in \mathbb{Z}_n$, claramente g es biyectiva. Sea $e \in F + \mathbb{Z}_n$, entonces existe $f \in F$ y $w \in \mathbb{Z}_n$ tales que $e = f + w$. Luego, $g(e) = g(f + w) = 2(f + w) = 2f + 2w$. Como $2f \in 2F$ y $2w \in \mathbb{P}_{2n}$ entonces $g(e) \in 2F + \mathbb{P}_{2n}$ como se quería. Análogamente se puede probar que la función $g_2 : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{I}_{2n}$ definida como: $g(x) = 2x + 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}_n$ es un isomorfismo entre H y H_2 . ■

Básicamente, para construir a la 3-gráfica $H + H$ hemos “pegado” dos copias disjuntas isomorfas a H (H_1 y H_2) usando las ternas $\{\alpha_a \mid a \in \mathbb{A}_{2n}\} + \mathbb{Z}_{2n}$. El lector interesado puede comprobar los puntos de contacto entre la construcción de $H + H$ y el método de acoplamiento propuesto en [3].

Teorema 2.1 Si H es tensa entonces $H + H$ es tensa.

Demostración.(Al absurdo)

Supongamos que $f : \mathbb{Z}_{2n} \rightarrow \{R, V, A\}$ es una coloración no heterocromática de $H + H$, entonces por el lema 2.1, $f(\mathbb{P}_{2n}) \neq \{R, V, A\}$ y $f(\mathbb{I}_{2n}) \neq \{R, V, A\}$.

Caso 1. $f(\mathbb{P}_{2n}) = R$. Por el comentario anterior se tiene que $f(\mathbb{I}_{2n}) = \{V, A\}$ y por la proposición 1.5 podemos suponer que $f(1) = V$ y $f(3) = A$. Luego, $\alpha_{-1} + 1 = \{1, 3, 0\}$ es heterocromática. (Contradicción).

Caso 2. $f(\mathbb{P}_{2n}) = \{R, V\}$. Por la proposición 1.5, sin pérdida de generalidad $f(0) = R$ y $f(2) = V$ y para no estar en el caso 1, $f(\mathbb{I}_{2n}) = \{R, A\}$.

Para $a \in \mathbb{A}_{2n}$ se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_a = \{0, 2, a\} \in H + H \\ f(0) = R, f(2) = V, f(\mathbb{I}_{2n}) = \{R, A\} \end{array} \right\} \Rightarrow f(a) = R$$

es decir, $f(\mathbb{A}_{2n}) = R$.

Por otra parte, $\mathbb{A}_{2n} - 2 = -\mathbb{A}_{2n} + 2$ entonces para todo $a \in \mathbb{A}_{2n}$ existe $a' \in \mathbb{A}_{2n}$ tal que $a - 2 = -a' + 2$ luego

$$\alpha_{a'} - a' = \{-a', -a' + 2, 0\} = \{a - 4, a - 2, 0\} = \beta_a \in H + H$$

entonces, para todo $a \in \mathbb{A}_{2n}$, si consideramos las ternas

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_a + 2 = \{a - 2, a, 2\} \in H + H \\ f(2) = V, f(a) = R, f(\mathbb{I}_{2n}) = \{R, A\} \end{array} \right\} \Rightarrow f(a - 2) = R$$

se tiene que $f(\mathbb{A}_{2n} - 2) = R$.

Como $(\mathbb{A}_{2n} - 2, \mathbb{A}_{2n}, \mathbb{A}_{2n} + 2)$ es una partición de \mathbb{I}_{2n} y $f(\mathbb{I}_{2n}) = \{R, A\}$, existe $a' \in \mathbb{A}_{2n}$ tal que $f(a' + 2) = A$. De aquí que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{a'} + 2 = \{2, 4, a' + 2\} \in H + H \\ f(2) = V, f(a' + 2) = A, f(\mathbb{P}_{2n}) = \{R, V\} \end{array} \right\} \Rightarrow f(4) = V$$

y la terna $\beta_{a'} + 4 = \{a', a' + 2, 4\}$ es heterocromática. (Contradicción).■

Proposición 2.1 *Si H es una 3-gráfica localmente árbol entonces $H + H$ también lo es.*

Demostración. Un argumento de conteo simple nos muestra que el tamaño de $H + H$ es igual a

$$2|F + \mathbb{Z}_n| + |\{\alpha_a \mid a \in \mathbb{A}_n\} + \mathbb{Z}_{2n}| = \frac{2n(n-2)}{3} + \frac{2n^2}{3} = \frac{2n(2n-2)}{3}$$

cantidad que coincide con el tamaño de una 3-gráfica localmente árbol de $2n$ vértices. Además, por el teorema 2.1, $H + H$ es tensa luego aplicando el lema 1.1 y considerando que $2n \equiv 0 \pmod{3}$ se tiene que la traza de todo vértice en $H + H$ es un árbol.■

Como veremos enseguida, teniendo en cuenta los resultados anteriores, es muy fácil construir una familia infinita de 3-árboles mínimos.

Para $k \in \mathbb{N}$, consideremos la familia de 3-gráficas H_k definida como

$$\begin{aligned} H_0 &= (\mathbb{Z}_3, \{0, 1, 2\}) \\ H_k &= H_{k-1} + H_{k-1} \end{aligned}$$

para $k \geq 1$.

Corolario 2.1 H_k es un 3-árbol mínimo.

Demostración. Probaremos por inducción sobre k que H_k es tensa y localmente árbol. Para $k = 0$ el resultado es evidente. Supongamos que para todo $k \leq t$ se tiene que H_k es tensa y localmente árbol entonces por el teorema 2.1 y la proposición 2.1, para $k = t + 1$ se tiene que $H_{t+1} = H_t + H_t$ es tensa y localmente árbol, como se quería. ■

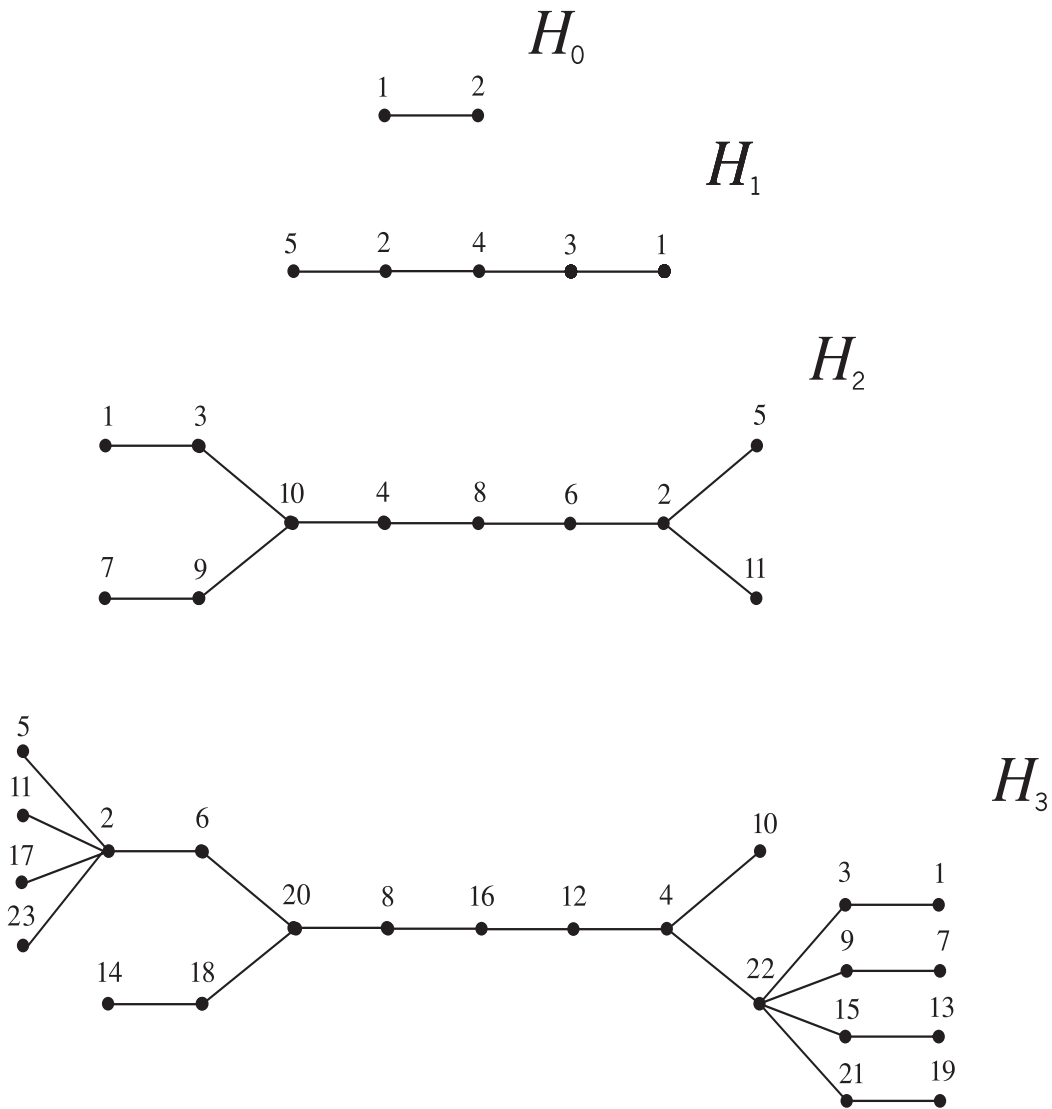


Figura 2.1 La traza de 0 en H_0, H_1, H_2 y H_3

2.2 El caso $3 \cdot 2^k + 1$

En esta sección se construye la primera familia de 3-árboles mínimos que se conoce para el caso en que el número de vértices es congruente con 1 mod 6. Le daremos una “probadita” al método general desarrollado en el capítulo 6 para resolver el caso 1 mod 3.

Sean $n = 3 \cdot 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ y $H_k = (\mathbb{Z}_n, E_k)$ el 3-árbol mínimo de orden n construido en la sección anterior. Consideremos las 3-gráficas:

$$H'_k = (\mathbb{Z}_n, E_k \setminus T)$$

$$\widetilde{H}_k = H'_k \cup (\mathbb{Z}_n \cup \{*\}, \{\{*, 0, 1\} + \mathbb{Z}_n\})$$

donde $T = \{\{0, 2^k, 2^{k+1}\} + \mathbb{Z}_n\}$ y por definición, $* + x = *$ para todo $x \in \mathbb{Z}_n$.

Proposición 2.2 *Para todo $x \in \mathbb{Z}_n$, los vértices $x-1$ y $x+1$ están en distintas componentes conexas de la traza de x en H'_k .*

Demostración. Por la proposición 1.5 y el corolario 1.2 sólo consideraremos el caso en que $x = 0$. La prueba se sigue por inducción sobre k . Para $k = 0$ el resultado es evidente; supongamos que para $k \leq t$ se tiene que los vértices -1 y 1 están en distintas componentes conexas de la traza de 0 en H'_k entonces por el lema 2.1 inciso iii), podemos aplicar hipótesis de inducción en H'_{t+1} a la 3-gráfica inducida por los vértices pares, luego los vértices -2 y 2 están en distintas componentes conexas de la traza de 0 restringida a los vértices pares de H'_{t+1} . Por otra parte, si consideramos las ternas en H'_{t+1} :

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &= \{0, 2, -1\} \\ \alpha_5 - 2 &= \{-2, 0, 3\} \\ \alpha_{-1} + 1 &= \{1, 3, 0\} \end{aligned}$$

y el hecho de que -1 y 1 son vértices de grado 1 en $Tr_{H'_{t+1}}(v)$, obtenemos el resultado deseado. ■

Luego, como H_k es localmente árbol, de la proposición anterior y del hecho de que la traza del vértice $*$ es un ciclo se deduce que:

Proposición 2.3 \widetilde{H}_k es una 3-gráfica localmente árbol de orden $n + 1$.

A continuación demostraremos una propiedad de las coloraciones no heterocromáticas de H'_k que resultará esencial para probar que \widetilde{H}_k es tensa.

Lema 2.2 Sea f una coloración no heterocromática de H'_k , entonces existe una sucesión de 4 elementos consecutivos $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{Z}_n$ tal que para cualquier par de colores distintos $\{c_1, c_2\}$ existe $x \in \mathbb{L}$ tal que $\{f(x), f(x+1)\} = \{c_1, c_2\}$.

Demostración. (Por inducción sobre k).

Para $k = 0$ el resultado es evidente, observe que este es el único caso donde la sucesión $\mathbb{L} = (0, 1, 2, 0)$ consta de 3 elementos distintos. Supongamos que para $k \leq t$ el lema es cierto.

Sean $n = 3 \cdot 2^{t+1}$ y f una coloración no heterocromática de H'_{t+1} . Por el corolario 2.1, se tiene que H'_{t+1} es tensa luego, existe $x \in \mathbb{Z}_n$ tal que $\{0, 2^{t+1}, 2^{t+2}\} + x$ es heterocromática. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$ y por tanto $f(\mathbb{P}_n) = \{R, V, A\}$.

Por otra parte, $H'_{t+1} = H'_t + H'_t$ luego, por el lema 2.1 y la hipótesis de inducción, existen 4 elementos consecutivos en \mathbb{P}_n que cumplen con la tesis del lema. No se pierde generalidad al suponer que

$$f(0) = f(6) = R, f(2) = V \text{ y } f(4) = A$$

Como $\alpha_5 = \{0, 2, 5\} \in H'_{t+1}$ se tiene que $f(5) \neq A$. Analicemos las coloraciones posibles del vértice 5.

Caso 1. $f(5) = R$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{-1} + 3 = \{3, 5, 2\}, \alpha_{-1} + 4 = \{4, 6, 3\} \in H'_{t+1} \\ f(2) = V, f(4) = A, f(5) = f(6) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(3) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{-1} + 5 = \{5, 7, 4\}, \alpha_5 + 2 = \{2, 4, 7\} \in H'_{t+1} \\ f(2) = V, f(4) = A, f(5) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(7) = A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{-1} + 2 = \{2, 4, 1\}, \{0, 4, -2\} + 3 = \{3, 7, 1\} \in H'_{t+1} \\ f(2) = V, f(3) = R, f(4) = f(7) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = A$$

Luego, la sucesión $\mathbb{L} = (0, 1, 2, 3)$ cumple la propiedad requerida.

Caso 2. $f(5) = V$.

Si $f(3) = R$ entonces la sucesión $\mathbb{L} = (2, 3, 4, 5)$ cumple la propiedad requerida.

Si consideramos que $\alpha_{-1} + 4 = \{4, 6, 3\} \in H'_{t+1}$ entonces $f(3) = A$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{-1} + 2 = \{2, 4, 1\}, \alpha_5 + 1 = \{1, 3, 6\} \in H'_{t+1} \\ f(2) = V, f(3) = f(4) = A, f(6) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{-1} = \{0, 2, -1\}, \{0, 4, -2\} + 1 = \{1, 5, -1\} \in H'_{t+1} \\ f(0) = R, f(1) = A, f(2) = V, f(5) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) = V$$

Luego, la sucesión $\mathbb{L} = (-1, 0, 1, 2)$ cumple la propiedad requerida. ■

Teorema 2.2 \widetilde{H}_k es un 3-árbol mínimo de orden $3 \cdot 2^k + 1$.

Demostración. Por la proposición 2.3, \widetilde{H}_k es localmente árbol y de orden $3 \cdot 2^k + 1$.

Sea f una coloración de \widetilde{H}_k . Como $H'_k \subset \widetilde{H}_k$, si f es heterocromática en H'_k ya acabamos. En caso contrario, por el lema 2.2 se tiene que independientemente de como se colorea al vértice $*$, existe un vértice x en \widetilde{H}_k tal que la terna $\{*, x, x + 1\}$ es heterocromática. ■

Capítulo 3

El caso $2 \bmod 3$

En [9] Sterboul construye 3-árboles mínimos de orden $n \equiv 2 \bmod 3$, desafortunadamente sus demostraciones no son claras y pasan por alto detalles importantes. Nuestro propósito es dar una prueba completa de este caso, usando la construcción básica y las ideas principales de [9].

3.1 La construcción

Como se vió en el capítulo 1, para probar el teorema 1.1 es suficiente construir un 3-árbol de n vértices con $\left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil$ ternas. En esta sección nos ocuparemos del caso en que $n \equiv 2 \bmod 3$, con $n \geq 8$. Para $n = 5$ se puede considerar la construcción de \mathfrak{L}_{11} propuesta en [2].

Sea $n = 3t + 2$, $t \geq 2$. Consideremos el grupo cíclico $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$, sus elementos serán los vértices de las 3-gráficas. La operación interna de \mathbb{Z}_n , la suma módulo n , la denotaremos como es usual, por $+$.

Un elemento importante de \mathbb{Z}_n en la construcción es $l = \left\lceil \frac{t-1}{2} \right\rceil$, donde las operaciones involucradas en su definición se realizan en \mathbb{Q} .

Denotemos por

$$\mathbb{B}_n = \{-4, 4, -7, 7, \dots, -(3l + 1), 3l + 1\} \subset \mathbb{Z}_n$$

No es difícil comprobar la validez de las siguientes propiedades de \mathbb{B}_n :

- Para n impar $|\mathbb{B}_n| = 2l$.

- Para n par $-(3l + 1) = 3l + 1$ y $|\mathbb{B}_n| = 2l - 1$.
- $x \in \mathbb{B}_n \setminus \{4\} \Rightarrow x - 3 \in \mathbb{B}_n$.
- $x \in \mathbb{B}_n \setminus \{-4\} \Rightarrow x + 3 \in \mathbb{B}_n$.
- $\{\{-2, -1, 0, 1, 2\}, \mathbb{B}_n - 1, \mathbb{B}_n, \mathbb{B}_n + 1\}$ es una partición de \mathbb{Z}_n .

Para $x \in \mathbb{B}_n$, consideremos las ternas siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha &= \{0, 1, 2\} \\ \beta_x &= \{0, 1, x\} \end{aligned}$$

Estas ternas van a generar al conjunto de ternas en la 3-gráfica i.e. cualquier terna es de la forma $\alpha + y$ o $\beta_x + y$ donde $y \in \mathbb{Z}_n$. Formalmente, denotaremos

$$G_n = (\mathbb{Z}_n, (\alpha \cup \{\beta_x \mid x \in \mathbb{B}_n\}) + \mathbb{Z}_n)$$

Nuestro propósito es demostrar que G_n es un 3-árbol con $\frac{n(n-2)}{3}$ ternas.

Veamos ahora cómo es la traza del vértice 0. Ella está definida por todas las ternas que contienen a 0. Estas ternas son: $\alpha, \alpha - 1, \alpha - 2, \beta_x, \beta_x - 1$, y $\beta_x - x$ con $x \in \mathbb{B}_n$. Luego, la traza del cero es el árbol representado en la figura 3.1.

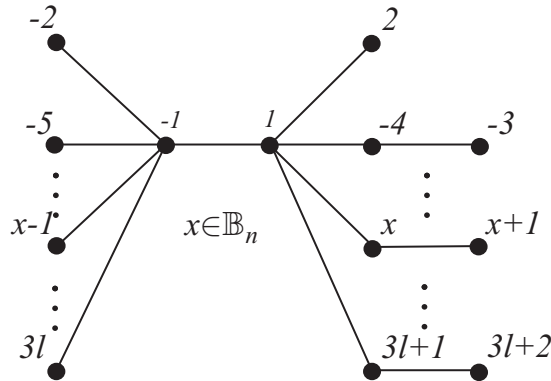


Figura 3.1 La traza del vértice 0

Por el corolario 1.2, la traza de todo vértice en G_n es isomorfa al árbol representado en la figura 3.1. Mediante un argumento de conteo simple se

puede comprobar que el tamaño de G_n es $\frac{n(n-2)}{3}$. De aquí que G_n tiene el número requerido de ternas y para demostrar el teorema 1.1 para el caso que nos ocupa, sólo nos resta probar que G_n es tensa.

Teorema 3.1 G_n es tensa.

Demostración. Sea $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \{R, V, A\}$ una coloración rojo-verde-azul de \mathbb{Z}_n donde ninguna terna en G_n es heterocromática. Como la traza de todo vértice es conexa, cada color tiene al menos dos vértices en su preimagen por f .

En la demostración consideramos dos casos, el primero cuando $f(0) \neq f(-1) = f(1)$ y el segundo cuando esto no es cierto.

En el primer caso podemos suponer que $f(0) = R$ y $f(1) = f(-1) = V$. Como la coloración es propia, existe un vértice x tal que $f(x) = A$. Al observar la traza de 0 en la figura 3.1 y con la hipótesis de que f no es heterocromática se tiene que $x \in \mathbb{B}_n + 1$. Además podemos suponer que $x \neq -3$ ya que por lo menos hay dos vértices de color azul. Observe que en ese caso $\{x-1, -(x-1), x+2\} \subset \mathbb{B}_n$. Luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{x-1} = \{0, 1, x-1\}, \beta_{-(x-1)} + x - 1 = \{0, x, x-1\} \in G_n \\ f(0) = R, f(1) = V, f(x) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(x-1) = R$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{x+2} - 1 = \{-1, 0, x+1\}, \\ \alpha + (x-1) = \{x-1, x, x+1\} \in G_n \\ f(-1) = V, f(0) = R, f(x-1) = R, f(x) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(x+1) = R.$$

Por lo que la terna $\beta_{-(x-1)} + x = \{1, x, x+1\}$ es heterocromática. Esto es una contradicción que nos muestra que el primer caso no puede ser posible.

Consideremos ahora el segundo caso. Si existe $x \in \mathbb{Z}_n$ tal que $f(x) \neq f(x-1) = f(x+1)$ entonces la coloración g definida como $g(z) = f(z-x)$ para $z \in \mathbb{Z}_n$ es también no heterocromática donde $g(0) \neq g(-1) = g(1)$ y aplicamos el primer caso, llegando a una contradicción. Luego, si $f(x) \neq f(x-1)$ entonces $f(x-1) \neq f(x+1)$. Además, como $\alpha + x - 1 = \{x-1, x, x+1\} \in G_n$ no es

heterocromática se tiene que $f(x) = f(x+1)$.

Estos hechos se pueden resumir en la siguiente propiedad:

$$(f(x) \neq f(x-1)) \Rightarrow (f(x-1) \neq f(x+1) \text{ y } f(x) = f(x+1)) \quad (*)$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(0) = R$ y $f(1) = V$ y por la propiedad (*) se tiene que $f(2) = V$ y $f(-1) = R$.

Lema 3.1 Para todo $x \in \mathbb{B}_n - 1$, si $f(x) = A$ entonces $f(x+1) = R$ y $f(x-1) = A$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{B}_n - 1$ y supongamos que $f(x) = A$ entonces se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{x+1} = \{0, 1, x+1\}, \beta_{-(x+1)} + x = \{-1, x, x+1\} \in G_n \\ f(-1) = R, f(0) = R, f(1) = V, f(x) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(x+1) = R.$$

por (*) $f(x-1) \neq R$, luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + x - 1 = \{x-1, x, x+1\} \in G_n \\ f(x) = A, f(x+1) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(x-1) = A$$

con lo que termina la demostración. ■

Lema 3.2 Para todo $x \in \mathbb{B}_n + 1$, si $f(x) = A$ entonces $f(x-1) = R$ y $f(x+1) = A$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{B}_n + 1$ y supongamos que $f(x) = A$ entonces se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{x-1} = \{0, 1, x-1\}, \beta_{-(x-1)} + x - 1 = \{0, x, x-1\} \in G_n \\ f(0) = R, f(1) = V, f(x) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(x-1) = R$$

por (*) $f(x+1) \neq R$, luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + x - 1 = \{x-1, x, x+1\} \in G_n \\ f(x-1) = R, f(x) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(x+1) = A$$

con lo que termina la demostración. ■

Sea x un vértice azul. Si $x = -2$ entonces la terna $\beta_4 - 2 = \{-2, -1, 2\}$ es heterocromática, lo cual es imposible. Si vemos la traza de 0 en la figura 3.1 notamos que $x \in \{\mathbb{B}_n - 1, \mathbb{B}_n + 1\}$.

Si $x = -3$ entonces por el lema 3.2 el vértice -2 es de color azul y si $x = 3$ entonces por el lema 3.1 el vértice 2 es de color azul, lo cual contradice que el vértice 2 sea verde y que f sea no heterocromática.

Por tanto, por los lemas 3.1 y 3.2 podemos suponer que $x \in \mathbb{B}_n + 1$ y $x + 1 \in \mathbb{B}_n - 1$ son vértices azules. Por otra parte, 2 es verde, $x + 1$ es azul y por el lema 3.1, $x + 2$ es rojo. Luego, la terna $\beta_{-(x-1)} + (x + 1) = \{2, x + 1, x + 2\}$ es heterocromática. Finalizando así la demostración del teorema. ■

Capítulo 4

3-cadenas tensas

Las 3-cadenas son 3-gráficas que por sí mismas tienen gran interés, independientemente de cómo se comporten con respecto a la tensión: pueden interpretarse como inmersiones de gráficas completas en superficies con frontera.

En este capítulo presentamos un método para construir 3-cadenas tensas de orden $n \equiv 0 \pmod{3}$ (y por tanto, 3-árboles mínimos) y se caracterizan las superficies obtenidas de acuerdo a su orientabilidad y al número de componentes de su frontera.

En [3] se establece una conjetura sobre el tamaño de las 3-gráficas 2-tensas mínimas de orden n . Aquí ofrecemos una prueba parcial de esta conjetura para $n \equiv 4, 16 \pmod{18}$.

4.1 El caso $3 \pmod{6}$

Consideremos el grupo abeliano $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$, sus elementos serán los vértices de nuestras 3-gráficas y escribiremos ax para denotar al vértice (a, x) . En esta sección sólo consideraremos el caso en que t es impar, luego $n = |\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t| = 3t \equiv 3 \pmod{6}$.

Nótese que usaremos a para denotar un elemento de \mathbb{Z}_3 y x ó y para denotar elementos de \mathbb{Z}_t . El símbolo $+$ denotará la suma en el grupo indicado: \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_t ó $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$.

Diremos que un conjunto de ternas F es cerrado si para todo $v \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ se tiene que $F = F + v$.

Consideremos los siguientes conjuntos de ternas:

$$\begin{aligned}\Delta_t^1 &= \{\{0x, 1x, 2x\} \mid x \in \mathbb{Z}_t\}, \\ \Delta_t^2 &= \left\{ \left\{ ax, ay, \left(a + 1, \frac{x+y}{2}\right) \right\} \mid \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}_3, \\ x, y \in \mathbb{Z}_t \end{array} \right\} \text{ y} \\ \Delta_t^3 &= \left\{ \left\{ ax, ay, \left(a + 1, \frac{x+y+1}{2}\right) \right\} \mid \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}_3, \\ x, y \in \mathbb{Z}_t \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Como t es impar, Δ_t^2 y Δ_t^3 están bien definidos. Sea $\Delta = \Delta_t^1 \cup \Delta_t^2 \cup \Delta_t^3$, consideremos la 3-gráfica $G_t = \{\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t, \Delta\}$.

Introduzcamos alguna terminología. Para todo $x \in \mathbb{Z}_t$, llamaremos *columna* al conjunto de vértices $\{0x, 1x, 2x\}$. En una columna tenemos un orden cíclico natural inducido por el orden $0 < 1 < 2 < 0$ en \mathbb{Z}_3 . Por otro lado para todo $a \in \mathbb{Z}_3$, al conjunto de vértices $\{a0, a1, \dots, (a, t-1)\}$ lo llamaremos *fila*. En una fila se tiene un orden cíclico natural inducido por el orden $0 < 1 < 2 < \dots < t-1 < 0$ de \mathbb{Z}_t . Esta estructura toroidal de $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ (ver la figura 4.1) nos permite hablar de la siguiente (previa) columna o fila. Nótese que el conjunto Δ_t^1 es el conjunto de columnas.

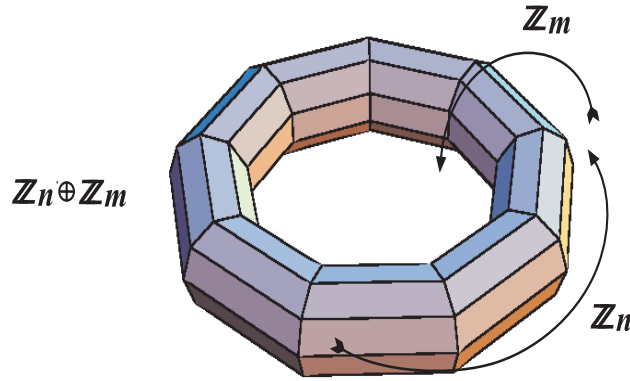


Figura 4.1 El toro $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$

Proposición 4.1 *Los conjuntos Δ_t^1, Δ_t^2 y Δ_t^3 son cerrados.*

Demostración. Sea $e = \{0x, 1x, 2x\} \in \Delta_t^1$ y $v = ay \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$, entonces

$$e + v = \{(a, x+y), (a+1, x+y), (a+2, x)\} \in \Delta_t^1$$

luego Δ_t^1 es cerrado.

Sea $e = \{ax, ay, (a+1, \frac{x+y}{2})\} \in \Delta_t^2$ y $v = bz \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$, entonces

$$e + v = \{(a+b, x+z), (a+b, y+z), (a+b+1, \frac{x+y}{2} + z)\}$$

como

$$\frac{x+y}{2} + z = \frac{x+y}{2} + \frac{2z}{2} = \frac{x+y+2z}{2} = \frac{(x+z)+(y+z)}{2}$$

haciendo

$$\begin{aligned} c &= a + b \\ w &= x + z \\ r &= y + z \end{aligned}$$

se tiene que:

$$e + v = \{cw, cr, (c+1, \frac{w+r}{2})\} \in \Delta_t^2$$

Análogamente, se comprueba que Δ_t^3 es cerrado. ■

Sea $Aut(G_t)$ el grupo de automorfismos de G_t .

Proposición 4.2 *Aut(G_t) es transitivo en vértices.*

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$. Demostremos que la función $p_{v_1, v_2} : \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t \rightarrow \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ definida como: $p_{v_1, v_2}(v) = v + (v_2 - v_1)$, $\forall v \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ es un automorfismo de G_t .

Claramente p_{v_1, v_2} es una biyección de $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ en sí mismo, pues es una “rotación” de este, además manda ternas en ternas ya que

$$p_{v_1, v_2}(e) = e + (v_2 - v_1) \in \Delta, \quad \forall e \in \Delta$$

pues por la proposición 4.1, Δ es cerrado. Luego $p_{v_1, v_2} \in Aut(G_t)$ y manda al vértice v_1 a v_2 , obteniéndose el resultado deseado. ■

Proposición 4.3 $\Delta_t^i \cap \Delta_t^j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Demostración. Evidentemente, $\Delta_t^1 \cap (\Delta_t^2 \cup \Delta_t^3) = \emptyset$ ya que Δ_t^1 es el único que contiene ternas con los tres vértices en la misma fila. Por otra parte, para todo $x \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ se tiene que $\frac{x}{2} \neq \frac{x+1}{2}$ y por tanto $\Delta_t^2 \cap \Delta_t^3 = \emptyset$. ■

Proposición 4.4 *El número de ternas en G_t es $\frac{n(n-2)}{3}$.*

Demostración. No es difícil comprobar que $|\Delta_t^1| = t$, $|\Delta_t^2| = |\Delta_t^3| = 3\binom{t}{2}$. Por la proposición 4.3, se tiene que:

$$\left| \bigcup_{i=1}^3 \Delta_t^i \right| = |\Delta_t^1| + |\Delta_t^2| + |\Delta_t^3|$$

Luego,

$$\left| \bigcup_{i=1}^3 \Delta_t^i \right| = t + 3t(t-1) = \frac{3t(3t-2)}{3} = \frac{n(n-2)}{3} \quad \blacksquare$$

Proposición 4.5 $S_t = (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t, \Delta_t^1 \cup \Delta_t^2)$ es un sistema de ternas de Steiner (STS).

Demostración. De la demostración de la proposición 4.4 sabemos que

$$|\Delta_t^1 \cup \Delta_t^2| = t + 3\binom{t}{2} = \frac{t(3t-1)}{2}$$

que es el número de ternas requeridas para un STS de orden $n = 3t$.

Veamos que todo par de elementos en $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$, aparece exactamente en una terna de S_t . Esencialmente hay tres tipos de parejas en $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$.

Si $\{v_1, v_2\}$ están en la misma columna, claramente hay exactamente una terna de Δ_t^1 que los contiene y no aparece en ninguna terna de Δ_t^2 . Si $\{v_1, v_2\}$ están en la misma fila, hay exactamente una terna de Δ_t^2 que los contiene y no aparece en ninguna terna de Δ_t^1 . Si se encuentran en filas y columnas distintas, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_1 = ax$ y $v_2 = (a+1, y)$. Los vértices v_1 y v_2 aparecen en una terna de S_t si y sólo si existe un elemento $v_3 = az$ tal que $\frac{x+z}{2} \equiv y \pmod{t}$ y hay un único z que satisface esta congruencia. ■

Es importante observar que S_t fue construido utilizando el método de Skolem (ver [1]).

Proposición 4.6 *Un par de vértices cualesquiera está contenido en una o dos ternas de G_t .*

Demostración. Por la proposición 4.5 S_t es un STS luego, un par de vértices cualquiera aparece en al menos una terna de G_t , por la proposición 4.3 es suficiente probar que para cualquier par de vértices $\{u, v\}$, existe Δ_t^i , $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\{u, v\}$ no forma terna en Δ_t^i . Si $\{u, v\}$ están en la misma columna, entonces no pertenecen a Δ_t^2 ya que S_t es un STS y $\{u, v\}$ está en una terna de Δ_t^1 , de otra manera $\{u, v\}$ no forma terna en Δ_t^1 . ■

Teorema 4.1 G_t es una 3-gráfica tensa.

Este teorema es uno de los resultados más importantes en esta sección y será demostrado posteriormente.

Teorema 4.2 G_t es una 3-cadena.

Demostración. Sea v un vértice de G_t . Por el teorema 4.1 y el lema 1.1, la traza $Tr_{G_t}(v)$ es una gráfica conexa. Por la proposición 4.4 y un argumento de conteo simple $Tr_{G_t}(v)$ es un árbol. Por la proposición 4.6 tiene que ser una cadena. ■

Analícemos con más detalle la traza de un vértice, la del 00 por ejemplo. Por definición es la gráfica con conjunto de vértices $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t \setminus \{00\}$ y conjunto de aristas que es la unión de los conjuntos siguientes:

$$\begin{aligned}\Delta_t^1(00) &= \{\{10, 20\}\} \\ \Delta_t^2(00) &= \{\{0x, (1, \frac{x}{2})\}, \{2x, (2, -x)\} \mid x \in \mathbb{Z}_t\} \\ \Delta_t^3(00) &= \{\{0x, (1, \frac{x+1}{2})\}, \{2x, (2, -x-1)\} \mid x \in \mathbb{Z}_t\}\end{aligned}$$

Nótese que la traza de 00 restringida a la fila 2 es la cadena $0, -1, 1, -2, 2, -3, \dots$ en la que se omitió la primera coordenada (igual a 2) de cada vértice. Luego, por la proposición 4.2 hemos probado que:

Proposición 4.7 La traza de un vértice en la fila i , restringida a la fila $i - 1$ es una cadena.

Proposición 4.8 *Una pareja de vértices está en la frontera de G_t si y sólo si es de la forma: $\{v, v + (1, 1/2)\}$. Las componentes conexas de la frontera son las clases $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t / \langle (1, 1/2) \rangle$. Si $t \equiv 0 \pmod{3}$ hay 3 componentes, de otra manera la frontera es conexa.*

Demostración. Nótese que el vértice $(1, 1/2)$ tiene valencia 1 en la traza de 00. Por la proposición 4.2 se tiene que en $Tr_{G_t}(v)$ el vértice $v + (1, 1/2)$ es de grado uno, $\forall v \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ y por lo tanto, la arista $\{v, v + (1, 1/2)\}$ aparece en la frontera de G_t . De aquí que las componentes conexas de la frontera quedan determinadas por las clases $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t / \langle (1, 1/2) \rangle$. Como 1 es generador de \mathbb{Z}_3 y $1/2$ es generador de \mathbb{Z}_t , si $t \equiv 0 \pmod{3}$ hay 3 componentes, de otra manera la frontera es conexa. ■

Se dice que una 3-gráfica es *2-tensa* si cualquiera de sus coloraciones deja por lo menos 2 ternas heterocromáticas. Observe que la 2-tensión en 3-gráficas es análoga a la 2-conexidad por aristas en las gráficas usuales.

En [3] se demuestra que el tamaño mínimo de una 3-gráfica 2-tensa de orden n es mayor o igual que $\left\lceil \frac{n(n-1)}{3} \right\rceil$ y se conjetura que esta cota es exacta para $n \geq 4$ y $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$. Allí se prueba parcialmente esta conjetura para $n \leq 15$ y $n = p - 1, (p + 1)/2$ con p un primo conexo.

Recuerde que los 3-ciclos son 3-gráficas donde la traza de cualquier vértice es un ciclo (gráfica 2-conexa mínima) y por tanto, estos son candidatos naturales a ser 2-tensos mínimos.

Teorema 4.3 *Existen 3-ciclos tensos de orden $n \equiv 4, 16 \pmod{18}$.*

Demostración. Consideremos la 3-cadena G_t , $t \equiv 1, 2 \pmod{3}$ y sea $r = 3t \equiv 3, 15 \pmod{18}$ el orden de G_t . Por la proposición 4.8 la frontera de G_t es conexa y por tanto podemos construir un 3-ciclo G_t^* de orden $n = r + 1$ pegando un cono de ternas con centro en un nuevo vértice $*$ a la frontera de G_t .

Sólo nos resta probar que G_t^* es tenso.

Sea f una coloración de G_t^* . Si f es propia en $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ entonces como $G_t \subset G_t^*$, por el teorema 4.1 f es heterocromática. En caso contrario, f es bicromática

en $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ y el vértice $*$ tiene el tercer color, luego como la frontera de G_t es conexa alguna terna que contiene al vértice $*$ es heterocromática. ■

A continuación enunciaremos un importante resultado de [3].

Teorema 4.4 *Si un 3-ciclo es tenso entonces es 2-tenso.*

Corolario 4.1 *Existen 3-ciclos 2-tenso de orden $n \equiv 4, 16 \pmod{18}$.*

Demostración. Consecuencia directa de los teoremas 4.3 y 4.4. ■

Pasemos a demostrar el importante teorema 4.1.

Supongamos que no es cierto. Sea $f : \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t \rightarrow \{R, V, A\}$ una coloración de G_t que no deja ternas heterocromáticas. Usaremos la notación $a : \dots \overset{x}{R} \dots$ para denotar que en la fila a el x -ésimo vértice está en R (está coloreado de rojo). El “triángulo” de colores tiene dos orientaciones: $R \rightarrow V \rightarrow A \rightarrow R$ ó $R \leftarrow V \leftarrow A \leftarrow R$. Veamos que el orden cíclico en una fila heterocromática es compatible con una de estas dos orientaciones de los colores. Supongamos que tenemos la coloración $a : \dots \overset{x}{R} \overset{x+1}{V} \dots \overset{y}{R} \overset{y+1}{A} \dots$ y denotemos por Θ al vértice $(a+1, \frac{x+y+2}{2})$. Como $\{ax, (a, y+1), \Theta\}$ $\{ay, (a, x+1), \Theta\}$ $\{(a, x+1), (a, y+1), \Theta\}$ son ternas en G_t (ver la figura 4.2) entonces independientemente del color de Θ , aparecerá una terna heterocromática. Luego podemos hablar de la orientación de una fila heterocromática, en el sentido anterior.

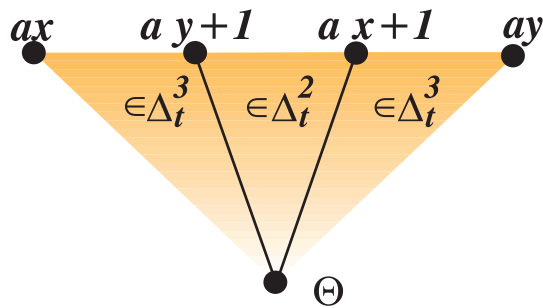


Figura 4.2 Las filas tienen orientación

Sea a una fila heterocromática. Podemos demostrar que cualquier color (digamos R) aparece en la siguiente fila. Sin pérdida de generalidad, tenemos

la coloración $a : \dots \overset{x}{R} \dots \overset{yy+1}{V} A \dots$ y denotemos por Θ al vértice $(a + 1, \frac{x+y+1}{2})$. Como $\{ax, ay, \Theta\}$ y $\{ax, (a, y + 1), \Theta\}$ son ternas en G_t (ver la figura 4.3), Θ tiene que ser R . Por tanto si una fila es heterocromática, la que le sigue también lo es.

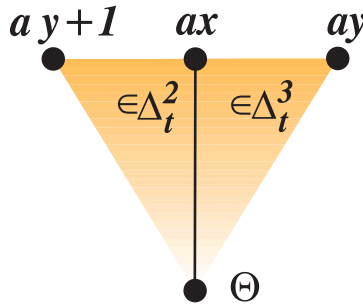


Figura 4.3 Caso de fila heterocromática

Si todas las filas son monocromáticas, toda terna en Δ_t^1 está coloreada con los tres colores, lo cual es imposible.

Si una fila es bicromática, por la proposición 4.7, ningún vértice de la siguiente fila puede estar coloreado con el tercer color.

Supongamos que existe una fila bicromática a , digamos rojo-verde. En la fila $a + 1$ no hay vértices azules, por la observación anterior. Si $a + 1$ es una fila rojo-verde, entonces la fila $a + 2$ no tiene vértices azules y esto contradice el hecho de que la coloración sea propia. Luego, podemos suponer que la fila $a + 1$ es monocromática roja y que la fila $a + 2$ tiene vértices azules. Si la fila $a + 2$ es monocromática azul, alguna terna de Δ_t^1 es heterocromática (imposible). Si la fila $a + 2$ es bicromática, independientemente de como se escoja el segundo color, el tercer color aparecerá en la fila siguiente (fila a), lo cual es imposible. Por tanto la fila $a + 2$ es heterocromática y como habíamos visto anteriormente, todas las filas tienen que ser heterocromáticas.

Como hay tres filas y dos orientaciones, podemos suponer que hay una fila (digamos la 0) tal que la que le sigue tiene la misma orientación.

Si la fila 0 no tiene dos vértices consecutivos con el mismo color, entonces $t \equiv 0 \pmod{3}$ y tendríamos la siguiente coloración $0 : \overset{0}{R} \overset{1}{V} \overset{2}{A} \overset{3}{R} \dots \overset{-3}{R} \overset{-2}{V} \overset{-1}{A}$. Como $\{10, 00, (0, -1)\}$ y $\{10, 01, (0, -1)\}$ son ternas en G_t , el vértice 10 tiene que estar coloreado de azul y por la similitud de los vértices (proposición 4.2) tenemos

la coloración 1 : $\overset{0}{A}\overset{1}{R}\overset{2}{V}\overset{3}{A} \dots \overset{-3}{A}\overset{-2}{R}\overset{-1}{V}$. Por el mismo argumento, la fila 2 tiene la siguiente coloración 2 : $\overset{0}{V}\overset{1}{A}\overset{2}{R}\overset{3}{V} \dots \overset{-3}{V}\overset{-2}{A}\overset{-1}{R}$. Por lo que cualquier terna en Δ_t^1 es heterocromática.

De aquí que en la fila 0 hay un vértice $0y$ tal que $(0, y + 1)$ es del mismo color y $(0, y - 1)$ es de un color diferente. En dicho caso tenemos la coloración 0 : $\dots \overset{x}{R}\overset{x+1}{V} \dots \overset{y-1}{V}\overset{y}{A}\overset{y+1}{A} \dots$. Denotemos por Θ el vértice $(1, \frac{x+y}{2})$. Como las ternas $\{(0, x + 1), (0, y + 1), \Theta + 01\}$, $\{0x, (0, y + 1), \Theta + 01\}$, $\{0x, (0, y - 1), \Theta\}$ y $\{0x, 0y, \Theta\}$ están en G_t entonces Θ es rojo y el vértice $\Theta + 01$ es azul. Esto contradice el hecho de que las filas 0 y 1 tienen la misma orientación (ver la figura 4.4). ■

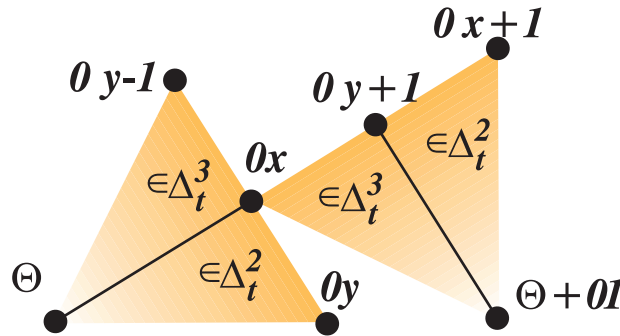


Figura 4.4 La contradicción

Como ya hemos observado, el 3-árbol G_t está asociado de manera natural a una superficie con frontera. A continuación demostraremos que esta superficie es no orientable.

Proposición 4.9 *La superficie asociada a G_t es no orientable.*

Demostración. De hecho, para cualquier trío de elementos distintos en \mathbb{Z}_t , x, y y z , el camino simplicial, $0x, 0y, 0z, 0x$ invierte su orientación en G_t . Para ver esto, observe la traza de $0x$ en G_t en la figura 4.5 donde se puede observar cómo están ordenadas las primeras coordenadas de los vértices en la traza de $0x$ en G_t .

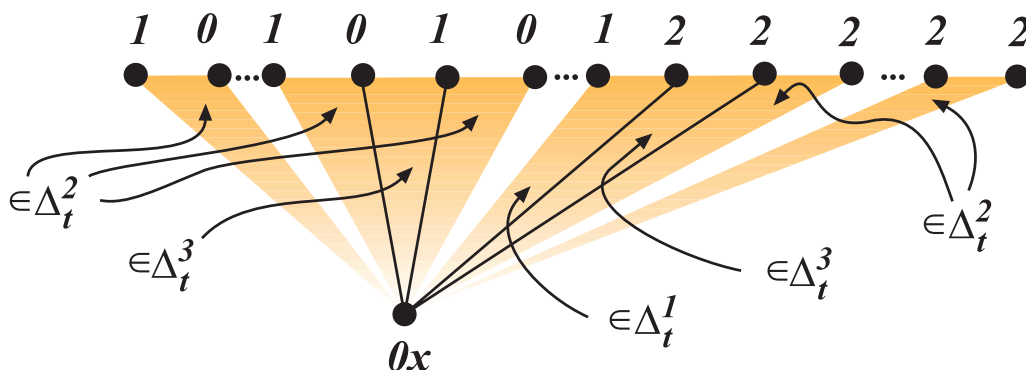


Figura 4.5 La forma de la traza de $0x$ en G_t

Esta estructura de la traza de $0x$ en G_t se deduce de la proposición 4.7 y del hecho de que $S_t = (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t, \Delta_t^1 \cup \Delta_t^2)$ es un sistema de ternas de Steiner (proposición 4.5). De aquí que si a la terna $\{0x, 0y, (1, \frac{x+y}{2})\} \in \Delta_t^2$ se le da la orientación $(0x, 0y, (1, \frac{x+y}{2}))$ entonces la terna $\{0x, 0z, (1, \frac{x+z}{2})\}$ tiene la orientación $(0x, 0z, (1, \frac{x+z}{2}))$ ya que $0x$ es localmente orientable (también lo es la traza de $0x$). Utilizando el mismo argumento basado en $0y$ y $0z$, obtenemos orientaciones opuestas para la terna $\{0y, 0z, (1, \frac{y+z}{2})\} \in \Delta_t^2$. ■

4.2 El caso $0 \pmod 6$

Como en el caso anterior, los elementos del grupo abeliano $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ serán los vértices de nuestras 3-gráficas. En esta sección consideraremos el caso en que t es par, luego, $t = 2m$ y $n = |\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t| = 6m \equiv 0 \pmod 6$.

Para resolver este caso, adaptaremos el método desarrollado en la sección anterior. La primera dificultad que se presenta es que para $x \in \mathbb{Z}_{2m}$, la operación $\frac{x}{2}$ no está bien definida: si $x \in \langle 2 \rangle$ entonces la ecuación $2y = x$ tiene dos soluciones y si $x \notin \langle 2 \rangle$, no tiene solución.

Denotaremos por $\mathbb{A}_{2m} \subset \mathbb{Z}_{2m}$ al conjunto $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Sea $x \in \mathbb{Z}_{2m}$ entonces la operación “*corchete*” se define como:

$$[x] = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in \langle 2 \rangle \\ \frac{x-1}{2} + m & \text{si } x \notin \langle 2 \rangle \end{cases}$$

donde para $z \in \langle 2 \rangle$, $\frac{z}{2} = y$ denotará la única solución en \mathbb{A}_{2m} de la ecuación $2y = z$.

Esta operación, un tanto artificial, nos permitirá construir 3-cadenas tensas. En el siguiente lema daremos algunas de las propiedades de la operación corchete. Su demostración es sencilla y se la dejamos al lector interesado.

Lema 4.1 Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}_{2m}$ entonces

$$i) [x] \in \mathbb{A}_{2m} \Leftrightarrow [x + 1] \notin \mathbb{A}_{2m}.$$

$$ii) [x + y] = x \Rightarrow x = y.$$

$$iii) [x + y] = [x + z] \Leftrightarrow y = z.$$

$$iv) x \notin \{-2, -1\} \Rightarrow [x + 2] - [x] = 1.$$

$$v) [x] + [-x - 1] = -1.$$

Consideremos los siguientes conjuntos de ternas:

$$\Delta_m^1 = \{\{0x, 1x, 2x\} \mid x \in \mathbb{Z}_{2m}\}$$

$$\Delta_m^2 = \left\{ \{ax, ay, (a + 1, [x + y])\} \mid \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}_3, \\ x, y \in \mathbb{Z}_{2m} \end{array} \right\}$$

$$\Delta_m^3 = \left\{ \{ax, ay, (a + 1, [x + y + 1])\} \mid \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}_3, \\ x, y \in \mathbb{Z}_{2m} \end{array} \right\}$$

Sean $\Delta = \Delta_m^1 \cup \Delta_m^2 \cup \Delta_m^3$ y $G_m = (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{2m}, \Delta)$. Al igual que en el caso anterior, si $x \in \mathbb{Z}_{2m}$, el conjunto de vértices $\{0x, 1x, 2x\}$ es la columna x y si $a \in \mathbb{Z}_3$ el conjunto de vértices $\{a0, a1, \dots, (a, 2m - 1)\}$ es la fila a . Como se puede observar, el conjunto de columnas coincide con Δ_m^1 .

Proposición 4.10 $\Delta_m^i \cap \Delta_m^j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Demostración. Evidentemente, $\Delta_m^1 \cap (\Delta_m^2 \cup \Delta_m^3) = \emptyset$ ya que todas las ternas de Δ_m^1 están compuestas por vértices en la misma fila y toda terna en $\Delta_m^2 \cup \Delta_m^3$ tiene vértices de dos filas distintas. Por otra parte, por el inciso i) del lema 4.1 se tiene que $\Delta_m^2 \cap \Delta_m^3 = \emptyset$. ■

Proposición 4.11 G_m tiene $\frac{n(n-2)}{3}$ ternas.

Demostración. No es difícil comprobar que

$$\begin{aligned} |\Delta_m^1| &= 2m \\ |\Delta_m^2| &= |\Delta_m^3| = 3\binom{2m}{2} \end{aligned}$$

y por la proposición 4.10 se tiene que

$$|\Delta| = \left| \bigcup_{i=1}^3 \Delta_m^i \right| = |\Delta_m^1| + |\Delta_m^2| + |\Delta_m^3|$$

luego,

$$|\Delta| = 2m + 6m(2m-1) = \frac{6m(6m-2)}{3} = \frac{n(n-2)}{3}$$

como se quería. ■

Proposición 4.12 Un par de vértices cualesquiera está a lo sumo en dos ternas de G_m .

Demostración. Sean $u = ax$ y $v = by$ dos vértices cualesquiera en \mathbb{Z}_{2m} .

Veamos que si $\{u, v\} \subset t \in \Delta_m^i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ entonces no hay otra terna en Δ_m^i que contiene a la pareja $\{u, v\}$. Si $t \in \Delta_m^1$ el resultado es evidente. Para $t \in \Delta_m^i$, $i \in \{2, 3\}$ consideraremos dos casos: si $a = b$ obtenemos el resultado deseado por el hecho de que la operación corchete está bien definida y para $a \neq b$ el resultado se sigue del inciso iii) del lema 4.1.

Por el resultado anterior y la proposición 4.10, sólo nos queda demostrar que para algún Δ_m^i , se cumple que si $t \in \Delta_m^i$ entonces $\{u, v\} \notin t$. Si $x = y$ entonces podemos suponer que $u = ax$ y $v = (a+1, x)$, en tal caso, por el inciso ii) del lema 4.1, $\{u, v\}$ no puede formar terna en Δ_m^2 . Por último, si $x \neq y$ entonces $\{u, v\}$ no puede formar terna en Δ_m^1 . ■

Teorema 4.5 G_m es una 3-gráfica tensa.

Este teorema es uno de los resultados más importantes en esta sección y será demostrado posteriormente.

Proposición 4.13 G_m es una 3-cadena.

Demostración. Sea v un vértice de G_m . Por el teorema 4.5 y el lema 1.1, $Tr_{G_m}(v)$ es una gráfica conexa. Por la proposición 4.11 y un argumento de conteo simple $Tr_{G_m}(v)$ es un árbol y por la proposición 4.12, tiene que ser una cadena. ■

A continuación estudiaremos las simetrías de G_m . Consideremos las funciones $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{2m} \rightarrow \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{2m}$ definidas como

$$\begin{aligned}\sigma_1(ax) &= (a+1, x) \\ \sigma_2(ax) &= (a, -x-1).\end{aligned}$$

Proposición 4.14 σ_1 y σ_2 son automorfismos de G_m . Además

- i) $\sigma_1(\Delta_m^1) = \Delta_m^1$, $\sigma_1(\Delta_m^2) = \Delta_m^2$ y $\sigma_1(\Delta_m^3) = \Delta_m^3$.
- ii) $\sigma_2(\Delta_m^1) = \Delta_m^1$, $\sigma_2(\Delta_m^2) = \Delta_m^3$ y $\sigma_2(\Delta_m^3) = \Delta_m^2$.

Demostración. La prueba de que σ_1 es un automorfismo de G_m que cumple i) es inmediata y se la dejamos al lector.

Sea e una terna de G_m , si $e = \{ax, (a+1, x), (a+2, x)\} \in \Delta_m^1$ entonces

$$\sigma_2(e) = \{(a, -x-1), (a+1, -x-1), (a+2, -x-1)\} \in \Delta_m^1$$

Si $e = \{ax, ay, (a+1, [x+y])\} \in \Delta_m^2$ entonces

$$\sigma_2(e) = \{(a, -x-1), (a, -y-1), (a+1, -[x+y]-1)\}$$

y por el inciso v) del lema 4.1 se tiene que $-[x+y]-1 = [-x-y-1]$, luego

$$\sigma_2(e) = \{(a, -x-1), (a, -y-1), (a+1, [(-x-1) + (-y-1) + 1])\} \in \Delta_m^3$$

además, como σ_2 es biyectiva y $|\Delta_m^2| = |\Delta_m^3|$ se tiene que $\sigma_2(\Delta_m^2) = \Delta_m^3$. Por otra parte, $\sigma_2 \circ \sigma_2 = Id$ luego, $\sigma_2(\Delta_m^3) = \sigma_2 \circ \sigma_2(\Delta_m^2) = \Delta_m^2$. ■

Proposición 4.15 La traza de un vértice en la fila i , restringida a la fila $i-1$ es una cadena.

Demostración. Por la proposición 4.14 basta realizar la demostración para vértices del tipo $0x$, $x \in \mathbb{A}_{2m}$. En dicho caso se puede comprobar que la traza del vértice $0x$, restringida a la fila dos es la cadena determinada por las ternas:

$$\begin{aligned} \{(2, x - j), (2, x + j), 0x\} &\in \Delta_m^2, \quad j \in \mathbb{A}_{2m} \setminus \{0\} \\ \{(2, x + j), (2, x + j - 1), 0x\} &\in \Delta_m^3, \quad j \in \mathbb{A}_{2m}. \blacksquare \end{aligned}$$

Recordemos que el triángulo de colores tiene dos orientaciones:

$$R \rightarrow V \rightarrow A \rightarrow R \quad \text{ó} \quad R \leftarrow V \leftarrow A \leftarrow R$$

Cuando el orden cíclico de una fila es compatible con una de estas dos orientaciones diremos simplemente que dicha fila tiene *orientación*.

Lema 4.2 *Sea f una coloración no heterocromática de G_m donde las filas 0 y 1 son heterocromáticas y tienen la misma orientación. Si en la fila 0 hay tres elementos consecutivos que no repiten colores, entonces en dicha fila no hay dos vértices consecutivos del mismo color.*

Demostración. Observe que es suficiente probar que si en la fila 0 hay tres elementos consecutivos $x, x+1, x+2$ que no repiten colores, entonces $f(x-1) \neq f(x)$.

Como la fila 0 es heterocromática, $m \geq 2$. Sin pérdida de generalidad vamos a considerar que las filas 0 y 1 tienen la siguiente orientación:

$$R \rightarrow V \rightarrow A \rightarrow R$$

Supongamos que existe $x \in \mathbb{Z}_{2m}$ tal que

$$\begin{aligned} f(x-1) &= f(x) = R \\ f(x+1) &= V \\ f(x+2) &= A \end{aligned}$$

Caso 1. $2x \neq -2$. Sea $\Theta = (1, [2x+1])$ entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0, x-1), (0, x+2), \Theta\}, \\ \{0x, (0, x+1), \Theta\} \in G_m \\ f((0, x-1)) = R, \quad f(0x) = R, \\ f((0, x+1)) = V, \quad f((0, x+2)) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(\Theta) = R$$

Por otra parte, por el inciso iv) del lema 4.1 se tiene que $\Theta + 01 = (1, [2x + 3])$, luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0, x + 1), (0, x + 2), \Theta + 01\}, \\ \{0x, (0, x + 2), \Theta + 01\} \in G_m \\ f(0x) = R, f((0, x + 1)) = V, f((0, x + 2)) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(\Theta + 01) = A$$

lo cual contradice que las filas 0 y 1 tengan la misma orientación.

Caso 2. $2x = -2$. Observe que en \mathbb{Z}_{2m} esta ecuación tiene dos soluciones: $x_1 = -1$ y $x_2 = -1 + m$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \{0x, (0, x + 1), 10\}, \\ \{0x, (0, x + 2), 10\} \in G_m \\ f((0, x - 1)) = R, f(0x) = R, \\ f((0, x + 1)) = V, f((0, x + 2)) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(10) = R$$

Caso 2.1. $f(x + 3) = A$. Consideremos las ternas

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0, x + 1), (0, x + 3), 11\}, \{0x, (0, x + 3), 11\} \in G_m \\ f(0x) = R, f((0, x + 1)) = V, f((0, x + 3)) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(11) = A$$

y otra vez, las filas 0 y 1 tienen orientaciones distintas. (Contradicción).

Caso 2.2. $f(x + 3) = R$. Consideremos las ternas

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0, x + 1), (0, x + 2), 11\}, \\ \{(0, x + 1), (0, x + 3), 11\} \in G_m \\ f((0, x + 1)) = V, f((0, x + 2)) = A, f((0, x + 3)) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(11) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0, x + 2), (0, x + 3), 12\} \in G_m \\ f((0, x + 2)) = A, f((0, x + 3)) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(12) \neq V$$

considerando que $f(11) = V$ y que las filas 0 y 1 tienen la misma orientación se tiene que $f(12) = A$.

Por otra parte

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0, x + 1), (0, x + 2), 1m\}, \{0x, (0, x + 2), 1m\} \in G_m \\ f(0x) = R, f((0, x + 1)) = V, f((0, x + 2)) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(1m) = A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0, x+2), (0, x+3), (1, m+1)\}, \\ \{(0, x+1), (0, x+3), (1, m+1)\} \in G_m \\ f((0, x+1)) = V, f((0, x+2)) = A, \\ f((0, x+3)) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f((1, m+1)) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0, x-1), (0, x+1), (1, m-1)\} \in G_m \\ f((0, x-1)) = R, f((0, x+1)) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f((1, m-1)) \neq A$$

y considerando que $f(1m) = A$ y que la fila 1 tiene la misma orientación que la fila 0 se tiene que

$$f((1, m-1)) = V$$

Si $m = 2$, se puede comprobar que al considerar solamente las ternas formadas por elementos de las filas 1 y 2 se tienen las siguientes coloraciones de $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$. Para $x = -1$ la coloración:

$$\begin{array}{l} 0 : \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ V & A & R & R \end{array} \\ 1 : \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ R & V & A & R \end{array} \\ 2 : \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ V & R & R & A \end{array} \end{array}$$

para $x = 1$ se tiene la coloración:

$$\begin{array}{l} 0 : \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ R & R & V & A \end{array} \\ 1 : \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ R & V & A & R \end{array} \\ 2 : \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ V & R & R & A \end{array} \end{array}$$

y en cualquiera de los dos casos aparece una terna en Δ_m^1 heterocromática. (Contradicción).

Por tanto, en lo que resta de la demostración vamos a suponer que $m \geq 3$. Consideremos las ternas

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(1, m-1), 1m, 20\}, \\ \{(1, m-1), (1, m+1), 20\} \in G_m \\ f((1, m-1)) = V, f(1m) = A, f((1, m+1)) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(20) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{10, 12, 21\}, \{10, 11, 21\} \in G_m \\ f(10) = R, f(11) = V, f(12) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(21) = R$$

Además, como $m \geq 3$ se tiene por el inciso iv) del lema 4.1 que $[m+2] = [m]+1$, luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \{10, 1m, (2, [m])\}, \\ \{10, (1, m-1), (2, [m])\} \in G_m \\ f(10) = R, f((1, m-1)) = V, f(1m) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f((2, [m])) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{11, 1m, (2, [m]+1)\}, \\ \{11, (1, m+1), (2, [m]+1)\} \in G_m \\ f(11) = V, f(1m) = A, f((1, m+1)) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f((2, [m]+1)) = V$$

de aquí que los pares de elementos en la fila 2: $\{20, 21\}$ y $\{(2, [m]), (2, [m]+1)\}$ no respetan una orientación cíclica del triángulo de colores, lo cual es imposible. ■

Pasemos a demostrar el importante teorema 4.5. Daremos una prueba similar a la del teorema 4.1 de la sección anterior.

Demostración del teorema 4.5. Sea $f : \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{2m} \rightarrow \{R, V, A\}$ una coloración de G_m que no deja ternas heterocromáticas.

Veamos que el orden cíclico en una fila heterocromática es compatible con una de las dos orientaciones del triángulo de colores. Supongamos que tenemos la coloración

$$a : \dots \overset{x \ x+1}{R \ V} \dots \overset{y \ y+1}{R \ A} \dots$$

y denotemos por Θ al vértice $(a+1, [x+y+2])$. Como

$$\begin{aligned} \{(a, x+1), (a, y+1), \Theta\} &\in \Delta_m^2 \\ \{ax, (a, y+1), \Theta\} &\in \Delta_m^3 \\ \{ay, (a, x+1), \Theta\} &\in \Delta_m^3 \end{aligned}$$

son ternas en G_t entonces, independientemente del color de Θ , aparecerá una terna heterocromática. Luego podemos hablar de la orientación de una fila heterocromática, en el sentido anterior.

Sea a una fila heterocromática. Podemos demostrar que cualquier color (diga-

mos R) aparece en la siguiente fila. Sin pérdida de generalidad, tenemos la coloración

$$a : \dots \overset{x}{R} \dots \overset{yy+1}{V} A \dots$$

y denotemos por Θ al vértice $(a + 1, [x + y + 1])$. Como

$$\{ax, ay, \Theta\}, \{ax, (a, y + 1), \Theta\} \in G_m,$$

Θ tiene que ser R . Por tanto si una fila es heterocromática, la que le sigue también lo es.

Si todas las filas son monocromáticas, toda terna en Δ_m^1 está coloreada con los tres colores, lo cual es imposible.

Si una fila es bicromática, por la proposición 4.15, ningún vértice de la siguiente fila puede estar coloreado con el tercer color.

Supongamos que existe una fila bicromática a , digamos rojo-verde. En la fila $a + 1$ no hay vértices azules, por la observación anterior. Si $a + 1$ es una fila rojo-verde, entonces la fila $a + 2$ no tiene vértices azules y esto contradice el hecho de que la coloración sea propia. Luego, podemos suponer que la fila $a + 1$ es monocromática roja y que la fila $a + 2$ tiene vértices azules. Si la fila $a + 2$ es monocromática azul, alguna terna de Δ_m^1 es heterocromática (imposible). Si la fila $a + 2$ es bicromática, independientemente de como se escoja el segundo color, el tercer color aparecerá en la fila siguiente (fila a), lo cual es imposible. Por tanto, la fila $a + 2$ es heterocromática y como habíamos visto anteriormente, todas las filas tienen que ser heterocromáticas, de lo que se deduce que $m \geq 2$. Como hay tres filas y dos orientaciones, podemos suponer que hay una fila (digamos la 0) tal que ella y la que le sigue tienen la orientación:

$$R \rightarrow V \rightarrow A \rightarrow R$$

Si la fila 0 no tiene dos vértices consecutivos con el mismo color, entonces $m \equiv 0 \pmod{3}$ y tendríamos la siguiente coloración de la fila 0:

$$0 : \overset{0}{R} \overset{1}{V} \overset{2}{A} \overset{3}{R} \dots \overset{-3}{R} \overset{-2}{V} \overset{-1}{A}$$

Luego,

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \{00, (0, -1), 10\}, e_2 = \{01, (0, -1), 10\} \in G_m \\ f((0, -1)) = A, f(00) = R, f(01) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(10) = A$$

y teniendo en cuenta que σ_2 es un automorfismo de G_m se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2(e_1) = \{(0, -1), 00, (1, -1)\}, \\ \sigma_2(e_2) = \{(0, -2), 00, (1, -1)\} \in G_m \\ f((0, -2)) = V, f((0, -1)) = A, f(00) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f((1, -1)) = R$$

lo cual contradice que las filas 0 y 1 tienen la misma orientación.

De aquí que en la fila 0 hay un vértice $0x$ tal que $(0, x + 1)$ es del mismo color y $(0, x - 1)$ es de un color diferente. En dicho caso tenemos la coloración

$$0 : \dots \overset{x-1}{R} \overset{x}{V} \overset{x+1}{V} \dots \overset{y}{A} \overset{y+1}{R} \dots$$

Denotemos por Θ el vértice $(1, [x + y])$. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0, x - 1), 0y, \Theta\}, \{0x, 0y, \Theta\} \in G_m \\ f((0, x - 1)) = R, f(0x) = V, f(0y) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(\Theta) = A$$

Ahora dividiremos el análisis en tres casos:

Caso 1. $x + y \in \mathbb{Z}_{2m} \setminus \{-2, -1\}$.

Caso 2. $x + y = -1$.

Caso 3. $x + y = -2$.

Si estamos en el Caso 1, por el inciso iv) del lema 4.1 se tiene que $[x + y + 2] = \Theta + 01$. Luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0, x + 1), 0y, \Theta + 01\}, \\ \{(0, x + 1), (0, y + 1), \Theta + 01\} \in G_m \\ f((0, x + 1)) = V, f(0y) = A, f((0, y + 1)) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(\Theta + 01) = V$$

lo cual contradice el hecho de que las filas 0 y 1 tienen la misma orientación.

Para el Caso 2 se tiene que $\Theta = (1, [-1]) = (1, -1)$ y al considerar las ternas

$$\left\{ \begin{array}{l} \{0x, (0, y + 1), \Theta + 01\}, \\ \{(0, x + 1), 0y, \Theta + 01\} \in G_m \\ f(0x) = V, f((0, x + 1)) = V, \\ f(0y) = A, f((0, y + 1)) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(\Theta + 01) = V$$

contradiendo que las filas 0 y 1 tienen la misma orientación.

Por último, si estamos en el Caso 3, observe que por el lema 4.2 el vértice $(0, y - 1)$ tiene que ser de color A . En dicho caso, como $m \geq 2$ se tiene que $[-1] = [-3] + 1$, luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0, x - 1), (0, y - 1), (1, [-3])\}, \\ \{0x, (0, y - 1), (1, [-3])\} \in G_m \\ f((0, x - 1)) = R, \quad f(0x) = V, \quad f((0, y - 1)) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f((1, [-3])) = A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(0x), (0y), (1, [-3] + 1)\}, \\ \{0x, (0, y + 1), (1, [-3] + 1)\} \in G_m \\ f(0x) = V, \quad f(0y) = A, \quad f((0, y + 1)) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f((1, [-3] + 1)) = V$$

de aquí que los colores de la pareja de vértices $\{(1, [-3]), (1, [-3] + 1)\}$ contradicen la orientación que se le había dado a la fila 1. ■

Una consecuencia inmediata de la proposición 4.13 es que la 3-gráfica G_m describe la triangulación de una superficie con frontera, a la que denominaremos S_m , donde cada terna en G_m determina de manera natural, un triángulo en S_m . Además, la frontera de G_m (∂G_m) coincide con la frontera de S_m .

A continuación daremos una descripción de la frontera de S_m así como su comportamiento con respecto a la orientabilidad.

Lema 4.3 *Sea $v \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{2m}$, entonces $\{v, v + 1m\}$ es una arista de la frontera de G_m .*

Demostración. Sea $v \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{2m}$, no es difícil comprobar que para $j \in \{1, 2\}$

$$\sigma_j(v + 1m) = \sigma_j(v) + 1m$$

luego, por la proposición 4.14 podemos suponer que $v = 0x$ con $x \in \mathbb{A}_{2m}$. Veamos que la pareja $\{0x, (1, x + m)\}$ aparece exactamente en una terna de G_m . Está claro que $\{0x, (1, x + m)\}$ no forma terna en Δ_m^1 .

Por otra parte, se puede comprobar que

$$([x + y] = x + m) \Leftrightarrow (y = x + 1)$$

luego, si $\{0x, 0y, (1, x + m)\} \in \Delta_m^3$ entonces $[x + y + 1] = x + m$ y $y = x$, lo cual es imposible. Si $\{0x, 0y, (1, x + m)\} \in \Delta_m^2$ entonces $[x + y] = x + m$ y

$y = x + 1$. De aquí que $\{0x, (1, x + m)\}$ forma terna únicamente en Δ_m^2 , como se quería. ■

Denotaremos por C_n al ciclo de n vértices.

Proposición 4.16 *La frontera de S_m es la unión de m copias disjuntas de C_6 .*

Demostración. Como G_m es 3-cadena, todo vértice está exactamente en dos aristas de ∂G_m y por tanto, ∂G_m es la unión de ciclos disjuntos. Por el lema 4.3 estos ciclos de la frontera de S_m quedan determinados por las clases $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{2m} / \langle 1m \rangle$.

Como $\langle 1m \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ la frontera de S_m está compuesta por m copias disjuntas de C_6 . ■

Veamos cómo se comporta S_m con respecto a la orientabilidad.

Proposición 4.17 *La superficie S_m es no orientable.*

Demostración. Sean x, y y z tres elementos distintos en \mathbb{Z}_{2m} , probemos que el camino simplicial $0x, 0y, 0z, 0x$ invierte su orientación en G_m . Por las proposiciones 4.13 y 4.15, la traza de $0x$ restringida a los vértices en las filas 0 y 1 es una cadena y como la operación corchete está bien definida, las aristas de dicha cadena resultan de alternar ternas de Δ_m^2 y Δ_m^3 .

De aquí que si a la terna $\{0x, 0y, (1, [x + y])\} \in \Delta_m^2$ se le da la orientación $(0x, 0y, (1, [x + y]))$ entonces la terna $\{0x, 0z, (1, [x + z])\}$ tiene la orientación $(0x, 0z, (1, [x + z]))$ ya que $0x$ es localmente orientable (también lo es la traza de $0x$). Utilizando el mismo argumento basado en $0y$ y $0z$, obtenemos orientaciones opuestas para la terna $\{0y, 0z, (1, [y + z])\} \in \Delta_m^2$. ■

Proposición 4.18 *La frontera de $G_m \setminus \Delta_m^1$ es la unión de m copias disjuntas de una gráfica 4-regular de orden 6.*

Demostración. Sea $ax \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{2m}$, por el lema 4.3 y la proposición 4.16, una de las componentes conexas de ∂G_m es un ciclo C que yace sobre el conjunto de vértices $v + \langle 1m \rangle$ el cual coincide con los vértices de las columnas x y $x + m$ de $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{2m}$.

Por otra parte, las ternas de Δ_m^1 no determinan aristas en ∂G_m . Luego, como G_m es 3-cadena, el vértice ax pertenece a una de las componentes conexas de la frontera de $G_m \setminus \Delta_m^1$ que resulta de agregarle al ciclo C las 6 aristas determinadas por las ternas $\{0x, 1x, 2x\}, \{(0, x+m), (1, x+m), (2, x+m)\} \in \Delta_m^1$, determinando así una gráfica 4-regular de orden 6, como se quería. ■

El hecho de que la frontera de $G_m \setminus \Delta_m^1$ no sea conexa hizo que no pudiéramos aplicar el método desarrollado en el capítulo 6 para construir 3-árboles mínimos con un vértice más, a partir de G_m . Por esta razón, en el capítulo que sigue tratamos nuevamente el caso $0 \pmod 6$.

Capítulo 5

Otra vez el caso $0 \bmod 6$

En este capítulo proponemos otra manera de resolver el caso $0 \bmod 6$ donde se pueda aplicar el método general desarrollado en el capítulo 6 para resolver el caso $1 \bmod 6$. Esta vez, la construcción está inspirada en el método de duplicación desarrollado en el capítulo 2.

Para darle claridad a la exposición, se tratan por separado los casos $0 \bmod 12$ y $6 \bmod 12$ aunque las ideas generales desarrolladas en ambos, son esencialmente las mismas.

Conviene destacar en este capítulo el uso de 3-gráficas cociente (ver [2]) para simplificar la demostración de tensión correspondiente.

5.1 Una importante 3-gráfica no tensa

En esta sección presentamos una 3-gráfica auxiliar que jugará un importante papel en la solución del caso que nos ocupa en este capítulo.

Sea $m = 3t$, $t \in \mathbb{N}$; el conjunto de vértices de la 3-gráfica será \mathbb{Z}_m . Denotemos por $\alpha_a = \{0, -t, a\}$ donde $a \in \{1, \dots, t\}$. La 3-gráfica G_m es por definición $(\mathbb{Z}_m, \{\alpha_a\} + \mathbb{Z}_m)$.

Lema 5.1 *Si f es una coloración no heterocromática de G_m entonces todas las clases de restos de \mathbb{Z}_m por el subgrupo $\langle t \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ son monocromáticas.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \{R, V, A\}$ una coloración no heterocromática de G_m donde el lema es falso. Si $y \in \mathbb{Z}_m$, observemos que para la coloración

$f + y : a \mapsto f(a + y)$ el lema también es falso. Luego, podemos suponer que $|f(\alpha_t)| = 2$, $f(0) = f(-t) = R$ y $f(t) = V$.

Para todo $a \in \{1, \dots, t\}$ se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_a + t = \{t, 0, a + t\} \in G_m \\ f(0) = R, f(t) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(a + t) \neq A,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_a - t = \{-t, t, a - t\} \in G_m \\ f(-t) = R, f(t) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(a - t) \neq A.$$

y como la coloración es propia, existe $x \in \{1, \dots, t - 1\}$ tal que $f(x) = A$. En tal caso se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{t-x} + x = \{x, x - t, t\}, \alpha_x - t = \{-t, t, x - t\} \in G_m \\ f(-t) = R, f(t) = V, f(x) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(x - t) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{t-x} + x + t = \{x + t, x, -t\}, \alpha_x + t = \{t, 0, x + t\} \in G_m \\ f(-t) = f(0) = R, f(t) = V, f(x) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(x + t) = R$$

y esto es una contradicción porque $\alpha_t + x = \{x, x - t, x + t\} \in G_m$. ■

Es útil observar que este lema es equivalente a decir que toda coloración no heterocromática de G_m factoriza por una coloración de la 3-gráfica cociente (ver definición en el capítulo 2) $G_m / \langle t \rangle$. O sea, para toda coloración f no heterocromática de G_m existe una coloración f' de $G_m / \langle t \rangle$ tal que $f = f' \circ nat$ donde nat es el mapeo natural de \mathbb{Z}_m en $\langle t \rangle$.

Teorema 5.1 G_m es localmente árbol y no tensa.

Demostración. Consideremos la traza del vértice 0, ella está definida por todas las ternas que tienen al 0, a saber: $\alpha_a, \alpha_a + t$ y $\alpha_a - a$ con $a \in \{1, \dots, t\}$. Luego, la traza de cero es la gráfica (de hecho es un árbol) representada en la figura 5.1. Luego, por el corolario 1.2 podemos concluir que G_m es localmente árbol.

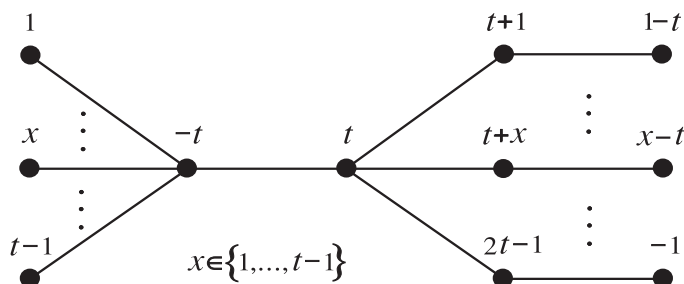


Figura 5.1 La traza de 0 en G_m

Por otra parte, si observamos que $\{0, -t\} \subset \alpha_a$ entonces en toda terna de G_m siempre hay dos elementos que pertenecen a la misma clase de restos de $\langle t \rangle$ en \mathbb{Z}_m . De aquí que si coloreamos a todas las clases de restos con el mismo color, la coloración resultante será no heterocromática. ■

Con el resultado anterior se pone en evidencia que la condición de ser localmente árbol es necesaria pero no suficiente para que una 3-gráfica sea 3-árbol mínimo.

5.2 El caso 0 mod 12

En esta sección construiremos 3-árboles de orden $n \equiv 0 \pmod{12}$ y tamaño $\frac{n(n-2)}{3}$.

Los elementos del grupo cíclico $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ serán los vértices de la 3-gráfica H_n que definiremos a continuación. Recuerde que todas las sumas son mod n .

Diremos que $x \in \mathbb{Z}_n$ es *par* si $x \in \langle 2 \rangle \subseteq \mathbb{Z}_n$ e impar en otro caso. Al conjunto de elementos pares lo denotaremos por \mathbb{P}_n y al de los impares por \mathbb{I}_n .

Denotemos por $\mathbb{A}_n = \{1, 2, \dots, \frac{n}{6}\} \subset \mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{B}_n = \{1, 2, \dots, \frac{n}{12}\} \subset \mathbb{A}_n$.

Para $a \in \mathbb{A}_n$ y $b \in \mathbb{B}_n$, consideremos las siguientes ternas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \{0, -\frac{n}{3}, 2a\} \\ \zeta_b &= \{0, 2, 3 - 4b\} \\ \eta_b &= \{0, -\frac{n}{3} + 2b, 4b - 1\} \end{aligned}$$

Éstas, generan a todas las ternas en la 3-gráfica H_n i.e. una terna es de la forma $\varepsilon_a + y$ ó $\zeta_b + y$ ó $\eta_b + y$ donde $y \in \mathbb{Z}_n$.

Formalmente denotaremos

$$H_n = (\mathbb{Z}_n, (\{\varepsilon_a \mid a \in \mathbb{A}_n\} \cup \{\zeta_b, \eta_b \mid b \in \mathbb{B}_n\})) + \mathbb{Z}_n$$

En la figura 5.2 se puede apreciar la traza del vértice 0 para los primeros valores de n .

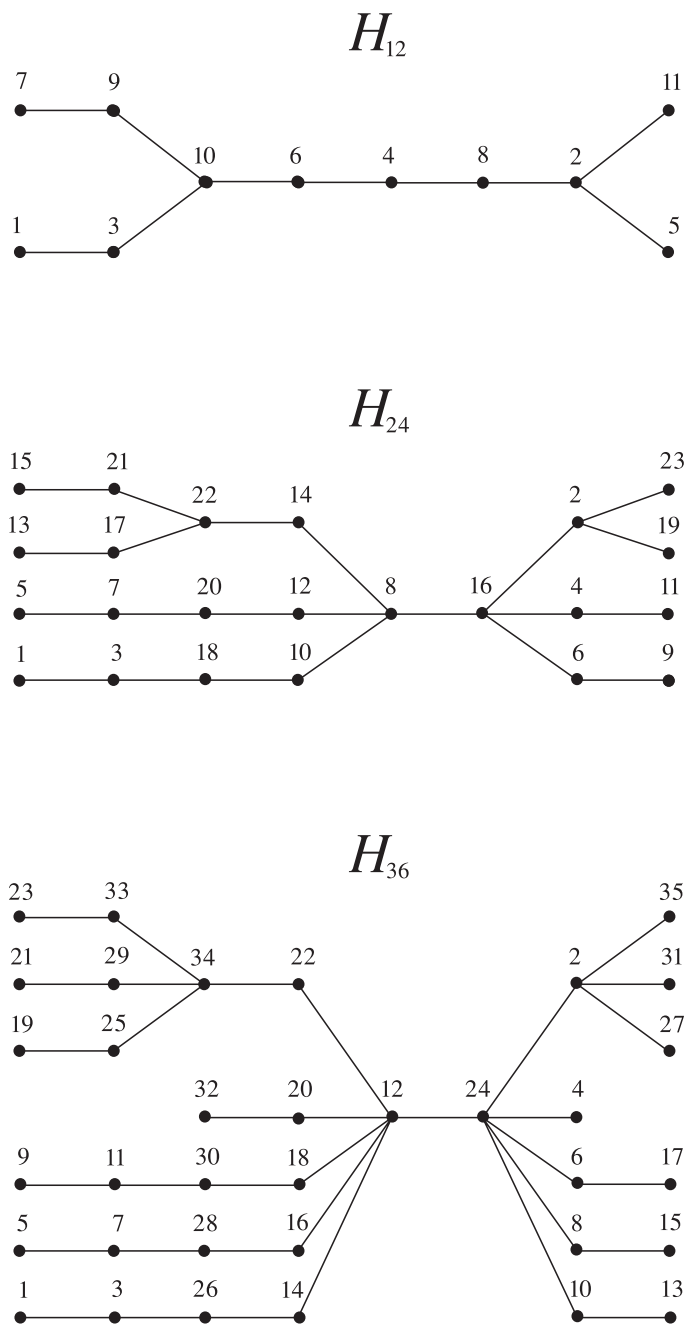


Figura 5.2 La traza de 0 en H_{12} , H_{24} y H_{36}

Sean $H_n^0 = (\mathbb{P}_n, \{\varepsilon_a \mid a \in \mathbb{A}_n\} + \mathbb{P}_n)$ y $H_n^1 = (\mathbb{I}_n, \{\varepsilon_a \mid a \in \mathbb{A}_n\} + \mathbb{I}_n)$.

Es importante observar que para construir a la 3-gráfica H_n hemos “pegado” dos copias disjuntas de $G_{n/2}$ (H_n^0 y H_n^1) usando las ternas ζ_b y η_b . Este procedi-

miento es análogo al método de duplicación desarrollado en la sección 2.1 pero con la importante diferencia que aquí la 3-gráfica “duplicada” no es tensa y la manera de “pegar” es más complicada. La estructura de H_n queda reflejada en el siguiente lema, análogo al lema 2.1 y que por tanto, no demostraremos.

Lema 5.2 *Para H_n^0 y H_n^1 se tiene que:*

i) $H_n^0, H_n^1 \subset H$.

ii) $H_n^0 \cap H_n^1 = \emptyset$.

iii) $H_n^0 \cong G_{n/2} \cong H_n^1$.

El lector interesado puede comprobar los puntos de contacto entre la construcción de H_n y el método de acoplamiento propuesto en [3].

Proposición 5.1 *El tamaño de H_n es $\frac{n(n-2)}{3}$.*

Demostración. Hay $n(\frac{n}{6} - 1) + \frac{n}{3}$ ternas generadas por ε_a . El número de ternas generadas por ζ_b y η_b es $\frac{n^2}{6}$. Estas ternas son distintas dos a dos y un cálculo simple nos lleva al resultado deseado. ■

Ahora demostraremos algunas propiedades de la 3-gráfica H_n que resultarán de gran importancia para probar que es tensa.

Lema 5.3 *Si f es una coloración no heterocromática de H_n entonces f es propia en \mathbb{P}_n ó \mathbb{I}_n .*

Demostración. Sea f una coloración no heterocromática de H_n que no satisface la tesis de nuestro lema. Observe que \mathbb{P}_n e \mathbb{I}_n no pueden ser monocromáticas simultáneamente ya que en ese caso, uno de los colores no aparecería. Supongamos que $f(\mathbb{I}_n) = A$, entonces $f(\mathbb{P}_n) = \{R, V\}$ y como $x \mapsto x + 2$ es un automorfismo de H_n (ver proposición 1.5) podemos suponer que $f(0) = R$, $f(2) = V$ y se tiene que la terna $\zeta_1 = \{0, 2, -1\} \in H_n$ contradice que f es no heterocromática.

Luego, ambas clases de restos, pares e impares son bicromáticas.

Para dos vértices $x, y \in \mathbb{Z}_n$ definamos la distancia entre ellos como el más pequeño número natural d tal que $(d \bmod n) + x = y$ ó $(d \bmod n) + y = x$.

Sea A el color común entre \mathbb{P}_n e \mathbb{I}_n . Sean x e y dos vértices tales que $f(\{x, y\}) = \{R, V\}$ y la distancia entre ellos es minimal. Como $x \mapsto x + 1$ es un automorfismo de H_n podemos suponer sin pérdida de generalidad que $y = 0$, $f(0) = R$, $f(x) = V$ y por tanto $f(\mathbb{P}_n) = \{R, A\}$, $f(\mathbb{I}_n) = \{V, A\}$ y $x \in \{\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, -1\}$. Además, por el carácter minimal de la distancia entre x e y se tiene que para todo $z \in \{x + 1, x + 2, \dots, -1\}$, $f(z) = A$.

Si $x \in \{\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, -\frac{n}{3} - 1\}$, denotemos por b' a la solución en \mathbb{B}_n de la ecuación $-\frac{n}{3} - 2b' + 1 = x$. Entonces la terna $\eta_{b'} + 1 - 4b' = \{1 - 4b', x, 0\} \in H_n$ es heterocromática, lo cual es imposible.

En otro caso, $x \in \{-\frac{n}{3} + 1, -\frac{n}{3} + 3, \dots, -1\}$ y consideraremos dos casos.

Si $x \equiv 1 \pmod{4}$, al tomar la solución b' en \mathbb{B}_n de la ecuación $1 - 4b' = x$ tenemos que la terna $\zeta_{b'} - 2 = \{-2, 0, x\} \in H_n$ es heterocromática.

Si $x \equiv 3 \pmod{4}$, al tomar la solución b' en \mathbb{B}_n de la ecuación $3 - 4b' = x$ se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{b'} + x = \{x, x - \frac{n}{3} + 2b', 2\} \in H_n \\ f(x) = V, f(x - \frac{n}{3} + 2b') = A, f(2) \neq V \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) = A$$

y la terna $\zeta_{b'} = \{0, 2, x\} \in H_n$ es heterocromática, lo cual es imposible. ■

Lema 5.4 *Si f es una coloración no heterocromática de H_n entonces f es propia, tanto en los vértices pares como en los impares.*

Demostración. Sea f una coloración no heterocromática de H_n entonces por el lema anterior, podemos suponer que $f(\mathbb{P}_n) = \{R, V, A\}$ y $R \notin f(\mathbb{I}_n)$.

Por el lema 5.2, la 3-gráfica generada por \mathbb{P}_n es isomorfa a $G_{n/2}$ luego, por el lema 5.1, para todo elemento par α la clase de restos $\langle \frac{n}{3} \rangle + \alpha$ tiene que ser monocromática. Por tanto, podemos suponer que $f(\langle \frac{n}{3} \rangle) = R$ y $f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 2) = V$.

Para todo $b \in \mathbb{B}_n$ se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_b + \langle \frac{n}{3} \rangle = \{0, 2, 3 - 4b\} + \langle \frac{n}{3} \rangle \\ f(\langle \frac{n}{3} \rangle) = R, f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 2) = V \\ \text{y } R \notin f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 3 - 4b) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 3 - 4b) = V$$

Además, observe que

$$\bigcup_{b \in \mathbb{B}_n} (\langle \frac{n}{3} \rangle + 3 - 4b) = \bigcup_{b \in \mathbb{B}_n} (\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 1)$$

y por tanto, para todo $b \in \mathbb{B}_n$, se tiene que $f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 1) = V$.

Por otra parte

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_b + 4b - 3 + \langle \frac{n}{3} \rangle = \{4b - 3, 4b - 1, 0\} + \langle \frac{n}{3} \rangle \\ f(\langle \frac{n}{3} \rangle) = R, f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 1) = V \\ \text{y } R \notin f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 3) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 3) = V$$

Como todo vértice impar está en una clase de restos de la forma $\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 1$ ó $\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 3$ podemos concluir que $f(\mathbb{I}_n) = V$.

Sea $x \in \mathbb{P}_n$ un vértice azul. Recuerde que $f(\langle \frac{n}{3} \rangle + x) = A$ y por tanto podemos suponer que $x \in \{2, 4, \dots, \frac{n}{3} - 2\} = 2\mathbb{B}_n \cup (\frac{n}{3} - 2\mathbb{B}_n)$. Si $x = 2b$, $b \in \mathbb{B}_n$ tenemos la terna heterocromática $\eta_b = \{0, x - \frac{n}{3}, 4b - 1\} \in H_n$. En otro caso, $x = \frac{n}{3} - 2b$, $b \in \mathbb{B}_n$ y la terna $\eta_b + x = \{x, 0, \frac{n}{3} + 2b - 1\} \in H_n$ es heterocromática, lo cual contradice nuestras hipótesis. ■

Lema 5.5 *Si f es una coloración no heterocromática de H_n entonces, todas las clases de restos de \mathbb{Z}_n por el subgrupo $\langle \frac{n}{3} \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ son monocromáticas.*

Demostración. Sea f una coloración no heterocromática de H_n , entonces por el lema 5.4 f es propia, tanto en los vértices pares como en los impares. Por el lema 5.2 \mathbb{P}_n e \mathbb{I}_n inducen 3-gráficas isomorfas a $G_{n/2}$. Finalmente, por el lema 5.1 la propiedad que queremos demostrar se satisface para las clases de restos mod $n/6$ y estas son, precisamente, las clases de restos mod $n/3$ en \mathbb{Z}_n . ■

Lema 5.6 *H_n es tensa si y sólo si $H_n / \langle \frac{n}{3} \rangle$ es tensa.*

Demostración. Observe que toda coloración no heterocromática f' de $H_n / \langle \frac{n}{3} \rangle$ induce de manera natural una coloración no heterocromática f de H_n . Por otra parte, por el lema 5.5, toda coloración no heterocromática f de H_n factoriza (i.e. $f = f' \circ \text{nat}$) por una coloración no heterocromática f' de $H_n / \langle \frac{n}{3} \rangle$. ■

Teorema 5.2 H_n es tensa.

Demostración. Denotemos por $\widehat{H}_n = H_n / \langle \frac{n}{3} \rangle$. Sea f' una coloración no heterocromática de H_n . Como en el lema anterior, la coloración f' factoriza por una coloración no heterocromática f de \widehat{H}_n , más aún, por el lema 5.4 f' (y también f) es propia tanto en los vértices pares como en los impares. Denotemos por $t = \frac{n}{3}$ y recuerde que $f : \mathbb{Z}_n / \langle \frac{n}{3} \rangle \cong \mathbb{Z}_t \rightarrow \{R, V, A\}$ es una coloración no heterocromática de \widehat{H}_n .

Primero demostraremos que hay un vértice $x \in \mathbb{Z}_t$ tal que $f(x) = f(x+1)$. Supongamos que no. Si no existe $y \in \mathbb{Z}_t$ tal que $f(y) = f(y+2)$ entonces, $t \equiv 0 \pmod{3}$, las clases de restos $\langle 3 \rangle$, $\langle 3 \rangle + 1$ and $\langle 3 \rangle + 2$ son monocromáticas y la terna $\zeta_{\frac{t-1}{4}} \pmod{t} = \{0, 2, 7\} \in \widehat{H}_n$ contradice el hecho de que f es no heterocromática. Luego, podemos suponer que existe $y \in \mathbb{Z}_t$ tal que $f(y) = f(y+2) = R$; en dicho caso $f(y+1) \neq R$ y $f(y+3) \neq R$. Supongamos que $f(y+1) = V$. La terna $(\zeta_1 \pmod{t}) + y + 1 = \{y+1, y+3, y\} \in \widehat{H}_n$ nos muestra que $f(y+3) = V$. Tomando como nuevo y al vértice $y+1$ y repitiendo el argumento anterior el número necesario de veces podemos concluir que no hay vértices azules lo cual contradice que f sea propia.

De esta manera, podemos suponer que $f(0) = R$, $f(1) = f(2) = V$.

Para todo $b \in \mathbb{B}_n = \{1, \dots, \frac{n}{12}\} \subset \mathbb{Z}_n$ denotemos por $b' = -4b \pmod{t} \in \mathbb{Z}_t$. Veamos que $f(b'+3) \neq A$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_b \pmod{t} = \{0, 2, b'+3\} \in \widehat{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(b'+3) \neq A.$$

Además, observe que $\{b' : b \in \mathbb{B}_n\} = \langle 4 \rangle \subset \mathbb{Z}_t$. Como f es propia en el conjunto de los vértices impares, existe un vértice $c' \in \langle 4 \rangle$ tal que $f(c'+1) = A$ y claro, $c' \neq 0$. Si denotamos por c al elemento en \mathbb{B}_n tal que $c' = -4c \pmod{t}$ entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} (\zeta_{\frac{n}{12}} \pmod{t}) - 2 = \{-2, 0, 1\} \in \widehat{H}_n, \\ (\zeta_c \pmod{t}) - 2 = \{-2, 0, c'+1\} \in \widehat{H}_n \\ f(0) = R, f(1) = V, f(c'+1) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(-2) = R$$

Ahora, sea $d \in \mathbb{B}_n$ tal que $c' + 4 = 4d \pmod{t}$. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} (\zeta_d \pmod{t}) + c' + 1 = \{c' + 1, c' + 3, 0\} \in \widehat{H}_n, \\ \zeta_c \pmod{t} = \{0, 2, c' + 3\} \in \widehat{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = V, f(c' + 1) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(c' + 3) = R$$

Como f es propia en el conjunto de los vértices pares, existe un vértice $x \in \langle 2 \rangle$ tal que $f(x) = V$ y consideraremos dos casos.

Si $x \in \langle 4 \rangle$ entonces $b' = x - c' - 4 \in \langle 4 \rangle$ y la terna

$$(\zeta_b \pmod{t}) + c' + 1 = \{c' + 1, c' + 3, x\} \in \widehat{H}_n$$

es heterocromática. (Contradicción).

Si $x \notin \langle 4 \rangle$ entonces, $b' = x - c' - 2 \in \langle 4 \rangle$ y se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} (\zeta_b \pmod{t}) + c' - 1 = \{c' - 1, c' + 1, x\} \in \widehat{H}_n \\ f(c' - 1) \neq A, f(c' + 1) = A, f(x) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(c' - 1) = V$$

Por tanto, la terna $(\zeta_d \pmod{t}) + c' - 1 = \{c' - 1, c' + 1, -2\} \in \widehat{H}_n$ es heterocromática, lo cual contradice que f no lo sea. ■

5.3 El caso 6 mod 12

En esta sección construimos 3-árboles mínimos con $n \equiv 6 \pmod{12}$ vértices. Como se podrá apreciar, el método propuesto constituye una modificación del método desarrollado en la sección anterior aunque en este caso también hay que superar algunas dificultades inherentes a él y trataremos de no ser reiterativos.

Para $n = 6$ basta considerar la construcción de \mathfrak{L}_{13} propuesta en [2] aunque el método que proponemos a continuación también es válido para este caso.

Sea $n = 12s + 6$, $s \geq 0$. Consideremos el grupo cíclico $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ sus elementos serán los vértices de la 3-gráfica H_n que definiremos posteriormente. Recuerde que las operaciones de suma son mod n .

Denotemos por $\mathbb{A}_n = \{1, \dots, 2s + 1\} \subset \mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{B}_n = \{1, \dots, s\} \subset \mathbb{A}_n$. Está claro que para $s = 0$, $\mathbb{B}_n = \{\emptyset\}$.

Para $a \in \mathbb{A}_n$ y $b \in \mathbb{B}_n$, consideremos las ternas siguientes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \{0, 8s + 4, 2a\} \\ \zeta_b &= \{0, 2, 3 - 4b\} \\ \eta_b &= \{0, 8s + 2b + 6, 4b - 1\} \\ \delta &= \{0, 2, 6s + 5\} \end{aligned}$$

estas generan al conjunto de ternas de la 3-gráfica H_n . Formalmente, denotaremos:

$$H_n = (\mathbb{Z}_n, (\{\varepsilon_a \mid a \in \mathbb{A}_n\} \cup \{\zeta_b, \eta_b \mid b \in \mathbb{B}_n\} \cup \delta) + \mathbb{Z}_n)$$

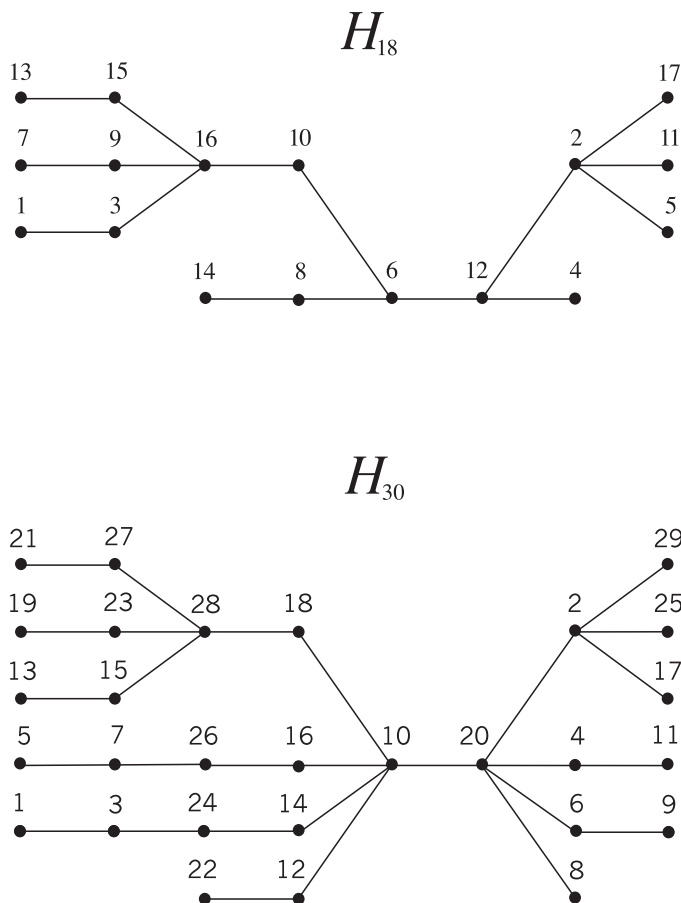


Figura 5.3 La traza de 0 en H_{18} y H_{30}

Nuestro propósito es demostrar que H_n es un 3-árbol mínimo, excepto para $n = 18$. La siguiente proposición si es válida para toda $n \equiv 6 \pmod{12}$.

Proposición 5.2 H_n tiene $\frac{n(n-2)}{3}$ ternas.

Demostración. Hay $n(\frac{n}{6} - 1) + \frac{n}{3}$ ternas generadas por ε_a . El número de ternas generadas por ζ_b y η_b es $n(\frac{n}{6} - 1)$ y por δ es n . Estas ternas son distintas dos a dos y un cálculo simple nos lleva al resultado deseado. ■

El lector puede comprobar con facilidad que la 3-gráfica H_6 es tensa.

La 3-gráfica H_{18} es localmente árbol (ver la figura 5.3) pero no es tensa. Se puede comprobar que la coloración f de H_{18} : $f(\langle 6 \rangle) = R$, $f(\langle 6 \rangle + 2, \langle 6 \rangle + 5) = V$ y $f(\langle 6 \rangle + 1, \langle 6 \rangle + 3, \langle 6 \rangle + 4) = A$ no es heterocromática.

Por tanto, en lo adelante vamos a suponer que $n \geq 30$. El caso anómalo $n = 18$ lo trataremos en la subsección 5.3.1.

El siguiente paso es probar importantes propiedades de H_n . Para esto van a ser útiles los lemas 5.2, 5.5 y 5.6 que son válidos también en este caso y se demuestran de la misma manera.

Lema 5.7 Si f es una coloración no heterocromática de H_n entonces f es propia en \mathbb{P}_n o \mathbb{I}_n .

Demostración. Sea f una coloración no heterocromática de H_n que no satisface la tesis de nuestro lema. Observe que \mathbb{P}_n e \mathbb{I}_n no pueden ser monocromáticas simultáneamente ya que en ese caso, uno de los colores no aparecería. Supongamos que $f(\mathbb{I}_n) = A$, entonces $f(\mathbb{P}_n) = \{R, V\}$ y como $x \mapsto x + 2$ es un automorfismo de H_n (ver proposición 1.5) podemos suponer que $f(0) = R$, $f(2) = V$ y se tiene que la terna $\zeta_1 = \{0, 2, -1\} \in H_n$ contradice que f es no heterocromática.

Luego, ambas clases de restos, pares e impares son bicromáticas. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $f(\mathbb{P}_n) = \{R, V\}$, $f(\mathbb{I}_n) = \{V, A\}$, $f(0) = V$ y $f(2) = R$.

Entonces para todo $b \in \mathbb{B}_n$ se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_b = \{0, 2, 3 - 4b\} \in H_n \\ f(0) = V, f(2) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(3 - 4b) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_b + 3 - 4b = \{3 - 4b, 2, 8s - 2b + 9\} \in H_n \\ f(2) = R, f(3 - 4b) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s - 2b + 9) = V$$

Nótese que:

$$\bigcup_{b \in \mathbb{B}_n} (8s - 2b + 11) = \bigcup_{b \in \mathbb{B}_n \setminus \{s\}} (8s - 2b + 9) \cup (3 - 4s)$$

Luego, $f(8s - 2b + 11) = V$, para todo $b \in \mathbb{B}_n$. De aquí que

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_b + 5 - 4b = \{5 - 4b, 4, 8s - 2b + 11\}, \\ \zeta_b + 2 = \{2, 4, 5 - 4b\} \in H_n \\ f(2) = R, f(4) \in \{R, V\}, f(8s - 2b + 11) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(5 - 4b) = V$$

para todo $b \in \mathbb{B}_n$.

Además:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \{0, 2, 6s + 5\} \in H_n \\ f(0) = V, f(2) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(6s + 5) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta + 6s + 5 = \{6s + 5, 6s + 7, 4\}, \\ \delta + 2 = \{2, 4, 6s + 7\} \in H_n \\ f(2) = R, f(4) \in \{R, V\}, f(6s + 5) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(6s + 7) = V$$

Luego, los siguientes $3s + 2$ impares consecutivos son de color V :

$$N = \{6s + 5, 6s + 7, \dots, 1 - 4s, 3 - 4s, 5 - 4s, \dots, -1, 1\}$$

Por la proposición 1.5 $x \mapsto x + 1$ es un automorfismo de H_n y considerando el carácter simétrico de las coloraciones de \mathbb{P}_n e \mathbb{I}_n , usando los mismos argumentos expuestos anteriormente, existe un vértice impar $x \in \{1, 3, \dots, 6s - 1, 6s + 1\}$ tal que $f(x) = V$, $f(x + 2) = A$ y $f(x + N) = V$. Pero esto contradice que $f(2) = R$ ya que $2 \in x + N$. ■

Lema 5.8 *Si f es una coloración no heterocromática de H_n entonces f es propia, tanto en los vértices pares como en los impares.*

Demostración. Sea f una coloración no heterocromática de H_n entonces por el lema anterior, podemos suponer que $f(\mathbb{P}_n) = \{R, V, A\}$ y $R \notin f(\mathbb{I}_n)$.

Por el lema 5.2, la 3-gráfica generada por \mathbb{P}_n es isomorfa a $G_{n/2}$ luego, por el lema 5.1, para todo elemento par α la clase de restos $\langle \frac{n}{3} \rangle + \alpha$ tiene que ser monocromática. Por tanto, podemos suponer que $f(\langle \frac{n}{3} \rangle) = R$ y $f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 2) = V$.

Primero demostraremos que bajo estas hipótesis se cumple que $f(\mathbb{I}_n) = V$.

Para todo $b \in \mathbb{B}_n$ se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_b + \langle \frac{n}{3} \rangle = \{0, 2, 3 - 4b\} + \langle \frac{n}{3} \rangle \\ f(\langle \frac{n}{3} \rangle) = R, \quad f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 2) = V \\ \text{y } R \notin f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 3 - 4b) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 3 - 4b) = V$$

Además, observe que

$$\bigcup_{b \in \mathbb{B}_n} (\langle \frac{n}{3} \rangle + 3 - 4b) = \bigcup_{b \in \mathbb{B}_n} (\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b + 1)$$

y por tanto, para todo $b \in \mathbb{B}_n$, se tiene que $f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b + 1) = V$.

Por otra parte

$$\bigcup_{b \in \mathbb{B}_n \setminus \{s\}} (\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b + 1) = \bigcup_{b \in \mathbb{B}_n \setminus \{1\}} (\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 3)$$

Luego para $b \in \mathbb{B}_n \setminus \{1\}$ se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_b + \langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 3 = \{4b - 3, 4b - 1, 0\} + \langle \frac{n}{3} \rangle \\ f(\langle \frac{n}{3} \rangle) = R, \quad f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 3) = V \\ \text{y } R \notin f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 1) = V$$

Además, si s es par entonces

$$\langle \frac{n}{3} \rangle + 10s + 9 \in \bigcup_{b \in \mathbb{B}_n} (\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b + 1)$$

y en otro caso,

$$\langle \frac{n}{3} \rangle + 10s + 9 \in \bigcup_{b \in \mathbb{B}_n \setminus \{1\}} (\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 1)$$

De aquí que $f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 10s + 9) = V$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_s + \langle \frac{n}{3} \rangle + 3 = \{3, 4s + 2, 10s + 9\} + \langle \frac{n}{3} \rangle \\ f(\langle \frac{n}{3} \rangle) = R, f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 10s + 9) = V \\ \text{y } R \notin f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 3) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 3) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 + \langle \frac{n}{3} \rangle + 1 = \{1, 3, 0\} + \langle \frac{n}{3} \rangle \\ f(\langle \frac{n}{3} \rangle) = R, f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 3) = V \\ \text{y } R \notin f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 1) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\langle \frac{n}{3} \rangle + 1) = V$$

Como todo vértice impar está en una clase de restos de la forma $\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b - 1$ ó $\langle \frac{n}{3} \rangle + 4b + 1$ ó $\langle \frac{n}{3} \rangle + 1$, podemos concluir que $f(\mathbb{I}_n) = V$.

Sea $x \in \mathbb{P}_n \setminus \{\langle \frac{n}{3} \rangle, \langle \frac{n}{3} \rangle + 2\}$ un vértice azul. Recuerde que en ese caso, $f(\langle \frac{n}{3} \rangle + x) = A$ y por tanto podemos suponer que $x \in \{4, \dots, 4s\}$.

Si $x = 4s$ entonces la terna $\zeta_1 + 4s = \{4s, 4s + 2, 4s + 1\}$ es heterocromática, lo cual es imposible. De aquí que $x \in (2\mathbb{B}_n + 2) \cup (4s - 2\mathbb{B}_n)$. Si $x = 2b + 2$, $b \in \mathbb{B}_n$ tenemos la terna heterocromática $\eta_b + 4s + 2 = \{4s + 2, x, 4b - 1 + 4s + 2\} \in H_n$. En otro caso, $x = 4s - 2b$, $b \in \mathbb{B}_n$ y la terna $\eta_b + x = \{x, 0, 4s + 2b - 1\} \in H_n$ es heterocromática, lo cual contradice nuestras hipótesis. ■

Teorema 5.3 *Para $n \neq 18$, H_n es tensa.*

Demostración. Sea $n \neq 18$, denotemos por $t = \frac{n}{3}$ y $\widehat{H}_n = H_n / \langle t \rangle$. Sea f' una coloración no heterocromática de H_n . Como en el lema 5.6, la coloración f' factoriza por una coloración no heterocromática f de \widehat{H}_n , más aún, por el lema 5.8 f' (y también f) es propia tanto en los vértices pares como en los impares, de aquí que $t \geq 10$. Recuerde que $f : \mathbb{Z}_n / \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}_t \rightarrow \{R, V, A\}$ es una coloración no heterocromática de \widehat{H}_n .

No es difícil comprobar que

$$\begin{aligned} \bigcup_{b \in \mathbb{B}_n} \zeta_b \bmod t &= \bigcup_{b \in \mathbb{B}_n} \{0, 2, 4b + 1\} \\ \bigcup_{b \in \mathbb{B}_n} \eta_b \bmod t &= \bigcup_{b \in \mathbb{B}_n} \{0, 2(b + 1), 4b - 1\} \end{aligned}$$

y por tanto, denotando por $\overline{\zeta}_b = \{0, 2, 4b + 1\}$ y $\overline{\eta}_b = \{0, 2(b + 1), 4b - 1\}$ se tiene que

$$(\mathbb{Z}_t, \{\overline{\zeta}_b, \overline{\eta}_b \mid b \in \mathbb{B}_n\} + \mathbb{Z}_t) \subset \widehat{H}_n$$

En el análisis que sigue consideraremos dos casos:

Caso 1. $\exists x \in \mathbb{Z}_t$ tal que $f(x) \neq f(x - 1)$ y $f(x) = f(x + 1)$.

Caso 2. $\forall x \in \mathbb{Z}_t$ tal que $f(x) \neq f(x - 1)$ se tiene que $f(x) \neq f(x + 1)$.

Análisis del Caso 1.

Por la proposición 1.5 podemos suponer que $x = 1$, $f(0) = R$ y $f(1) = f(2) = V$.

Al considerar, para todo $b \in \mathbb{B}_n$ las ternas siguientes en \widehat{H}_n se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\zeta}_b = \{0, 2, 4b + 1\} \in \widehat{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(4b + 1) \neq A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\zeta}_s + 1 = \{1, 3, 0\} \in \widehat{H}_n \\ f(0) = R, f(1) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(3) \neq A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\eta}_1 - 3 = \{-3, 1, 0\} \in \widehat{H}_n \\ f(0) = R, f(1) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(-3) \neq A$$

y como f es propia en \mathbb{I}_t se tiene que $t \geq 3$ y

$$\exists d \in \mathbb{B}_n \setminus \{t - 1, t\} \text{ tal que } f(4d + 3) = A$$

Luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\zeta}_{s-d} + 4d + 1 = \{4d + 1, 4d + 3, 0\} \in \widehat{H}_n \\ f(0) = R, f(4d + 1) \neq A, f(4d + 3) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(4d + 1) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\zeta}_d + 2 = \{2, 4, 4d + 3\}, \\ \overline{\zeta}_{s-d+1} + 4d + 1 = \{4d + 1, 4d + 3, 4\} \in \widehat{H}_n \\ f(2) = V, f(4d + 1) = R, f(4d + 3) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(4) = A$$

Si $d = 1$ entonces la terna $\overline{\eta}_1 + 1 = \{1, 5, 4\}$ es heterocromática, lo cual no puede ocurrir. Luego $d \geq 2$ y lo podemos tomar de tal manera que $f(4d - 1) \neq A$.

De esta forma, tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\zeta_{d-1}} + 2 = \{2, 4, 4d - 1\} \in \widehat{H}_n \\ f(2) = V, f(4) = A, f(4d - 1) \neq A \end{array} \right\} \Rightarrow f(4d - 1) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\eta_{d+1}} = \{0, 2d + 4, 4d + 3\}, \\ \overline{\eta_{d-1}} + 4 = \{4, 2d + 4, 4d - 1\} \in \widehat{H}_n \\ f(0) = R, f(4) = A, f(4d - 1) = V, f(4d + 3) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(2d + 4) = A$$

Finalmente, la terna $\overline{\eta_d} + 2 = \{2, 2d + 4, 4d + 1\}$ es heterocromática (Contradicción). Concluyendo así el análisis del caso 1.

Análisis del Caso 2. Aquí consideraremos dos posibilidades.

Si para todo $x \in \mathbb{Z}_t$ tal que $f(x) \neq f(x-1)$ se tiene que $f(x) \neq f(x+1)$ y $f(x-1) \neq f(x+1)$ entonces $t \equiv 1 \pmod{3}$, las clases de restos $\langle 3 \rangle$, $\langle 3 \rangle + 1$ and $\langle 3 \rangle + 2$ son monocromáticas y la terna $\overline{\zeta_3} = \{0, 2, 13\} \in \widehat{H}_n$ contradice el hecho de que f es no heterocromática.

En otro caso, existe un vértice $x \in \mathbb{Z}_t$ tal que $f(x-1) = f(x+1) = R$ y $f(x) = V$. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\zeta_s} + x = \{x, x + 2, x - 1\} \in \widehat{H}_n \\ f(x-1) = R, f(x) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(x+2) \neq A$$

y para no estar en el caso 1 $f(x+2) \neq R$. Luego, $f(x+2) = V$; tomando como nuevo x al vértice $x+1$ y repitiendo el argumento anterior el número necesario de veces podemos concluir que no hay vértices azules lo cual contradice que f sea propia. ■

5.3.1 El caso especial de orden 18

Como pudimos apreciar, H_{18} es una 3-gráfica localmente árbol no tensa. En esta subsección construiremos un 3-árbol mínimo de orden 18 que resultará esencial en la construcción de un 3-árbol de orden 19 en el capítulo 6.

Consideremos la 3-gráfica:

$$T_{18} = (\mathbb{Z}_{18}, \{\varepsilon_a, \xi_a \mid a \in \{1, 2, 3\}\} + \mathbb{Z}_{18})$$

donde

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \{0, 12, 2a\} \\ \xi_a &= \{0, 2^a, 6a + 5\}\end{aligned}$$

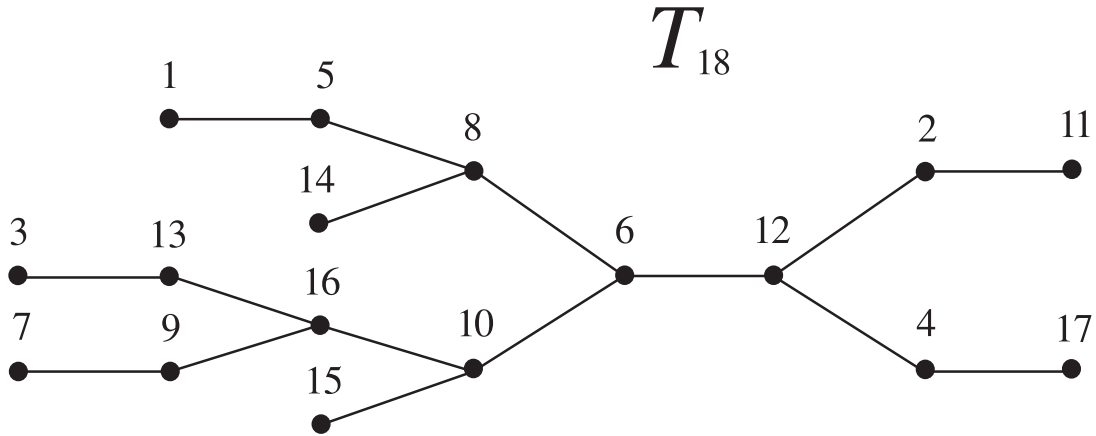


Figura 5.4 La traza de 0 en T_{18}

Ahora seguiremos los pasos de la demostración de tensión para H_n , $n \geq 30$.

Lema 5.9 *Si f es una coloración no heterocromática de T_{18} entonces f es propia en \mathbb{P}_{18} ó \mathbb{I}_{18} .*

Demostración. Sea f una coloración no heterocromática de T_{18} que no satisface la tesis de nuestro lema. Observe que \mathbb{P}_{18} e \mathbb{I}_{18} no pueden ser monocromáticas simultáneamente ya que en ese caso, uno de los colores no aparecería. Supongamos que $f(\mathbb{I}_{18}) = A$, entonces $f(\mathbb{P}_{18}) = \{R, V\}$ y como $x \mapsto x + 2$ es un automorfismo de T_{18} (ver proposición 1.5) podemos suponer que $f(0) = R$, $f(2) = V$ y se tiene que la terna $\xi_1 = \{0, 2, 11\} \in T_{18}$ contradice que f es no heterocromática.

Luego, ambas clases de restos, pares e impares son bicromáticas. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $f(\mathbb{P}_{18}) = \{R, V\}$, $f(\mathbb{I}_{18}) = \{V, A\}$, $f(0) = V$ y $f(2) = R$.

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \{0, 2, 11\} \in T_{18} \\ f(0) = V, f(2) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(11) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 + 9 = \{9, 11, 2\} \in T_{18} \\ f(2) = R, f(11) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(9) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 + 2 = \{2, 4, 13\}, \xi_1 + 11 = \{11, 13, 4\} \in T_{18} \\ f(2) = R, f(11) = V, f(4) \in \{R, V\} \end{array} \right\} \Rightarrow f(13) = V$$

y hemos probado que 3 vértices impares consecutivos son de color verde.

Por la proposición 1.5 $x \mapsto x + 1$ es un automorfismo de T_{18} y considerando el carácter simétrico de las coloraciones de \mathbb{P}_{18} e \mathbb{I}_{18} , usando los mismos argumentos expuestos anteriormente, existen 3 vértices pares consecutivos con el color que tienen en común entre \mathbb{I}_{18} y \mathbb{P}_{18} : el verde.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(14) = f(16) = f(0) = V$ y $f(2) = R$. Nuevamente $f(9) = f(11) = f(13) = V$, además

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_2 + 16 = \{16, 2, 15\} \in T_{18} \\ f(2) = R, f(16) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(15) = V$$

luego hay 4 impares consecutivos de color V y con un argumento similar al anterior podemos suponer que $f(12) = f(14) = f(16) = f(0) = V$ y $f(2) = R$ y tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_3 + 12 = \{12, 2, 17\} \in T_{18} \\ f(2) = R, f(12) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(17) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_2 + 2 = \{2, 6, 1\}, \xi_3 + 1 = \{1, 9, 6\} \in T_{18} \\ f(2) = R, f(9) = V, f(6) \in \{R, V\} \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = V$$

de aquí que los siguientes 6 impares son de color verde: $\{9, 11, 13, 15, 17, 1\}$ y por tanto podemos suponer que $\{10, 12, 14, 16, 0\}$ son de color verde.

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_3 + 15 = \{15, 5, 2\} \in T_{18} \\ f(2) = R, f(15) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(5) = V$$

Como cada color aparece por lo menos dos veces y $f(\mathbb{I}_{18}) = \{V, A\}$ se tiene que $f(3, 7) = A$ y la terna $\xi_3 + 2 = \{2, 10, 7\} \in T_{18}$ es heterocromática. (Contradicción).■

Teorema 5.4 T_{18} es un 3-árbol de tamaño 96.

Demostración. Comprobar que T_{18} tiene el número requerido de ternas es simple y se lo dejamos al lector.

Sea f una coloración no heterocromática de T_{18} entonces por el lema anterior, podemos suponer que $f(\mathbb{P}_{18}) = \{R, V, A\}$.

No es difícil comprobar que la 3-gráfica inducida por \mathbb{P}_{18} en T_{18} es isomorfa a G_9 luego, por el lema 5.1, para todo elemento par α la clase de restos $\langle 6 \rangle + \alpha$ tiene que ser monocromática. Por tanto, podemos suponer que $f(\langle 6 \rangle) = R$, $f(\langle 6 \rangle + 2) = V$ y $f(\langle 6 \rangle + 4) = A$.

Luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 + 8 = \{8, 10, 1\}, \xi_2 + 2 = \{2, 6, 1\} \in T_{18} \\ f(2) = V, f(6) = R, f(8) = V, f(10) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 + 10 = \{10, 12, 3\}, \xi_2 + 4 = \{4, 8, 3\} \in T_{18} \\ f(4) = A, f(8) = V, f(10) = A, f(12) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(3) = A$$

y por tanto, la terna $\xi_1 + 1 = \{1, 3, 12\} \in T_{18}$ es heterocromática, lo cual contradice que f sea no heterocromática. ■

Capítulo 6

El caso $1 \pmod 3$

Finalmente, tratamos el caso $1 \pmod 3$. Recuerde que aquí en un 3-árbol mínimo todas las trazas son árboles excepto una, que tiene un ciclo.

La idea general para la solución de este caso consiste en usar algún 3-árbol conocido para el caso $0 \pmod 3$ y ver la manera de agregarle un vértice en buenas condiciones.

Para el caso $4 \pmod 6$ partimos de las 3-cadenas tensas de orden congruente con $3 \pmod 6$ construidas en el capítulo 4 y para el caso $1 \pmod 6$ utilizamos los 3-árboles construidos en el capítulo 5 con $n \equiv 0 \pmod 6$ vértices.

6.1 Un buen candidato a 3-árbol mínimo

Cuando $n \equiv 1 \pmod 3$, la cota inferior para el número de ternas en un 3-árbol es $\frac{(n-1)^2}{3}$. Como ya hemos observado, esta cota puede ser alcanzada por una 3-gráfica donde la traza de un vértice es un ciclo y la de cualquier otro vértice es un árbol.

El método que proponemos exige la existencia de una 3-gráfica M localmente árbol con $n \equiv 0 \pmod 3$ vértices que debe cumplir ciertas propiedades. A partir de M construiremos una 3-gráfica \widetilde{M} con $n + 1$ vértices, donde las trazas de todos sus vértices son árboles, excepto una que es un ciclo.

Consideremos el caso más simple, donde M es una 3-cadena, i.e. la traza de cualquiera de sus vértices es una cadena. Si M tiene $\frac{n}{3}$ ternas disjuntas y

la frontera de M es conexa, entonces hay una manera sencilla de obtener una 3-gráfica \widetilde{M} localmente árbol con $n+1$ vértices. Pegamos un cono de ternas con centro en un nuevo vértice, a la frontera de M (ver la figura 6.1) y extraemos el conjunto de ternas disjuntas. Observe que \widetilde{M} es una *casi 3-cadena*, es decir, todas las trazas de sus vértices son cadenas excepto una, que es un ciclo. Es interesante observar que no se conoce si el hecho de que M sea tensa conduzca a que \widetilde{M} también lo sea.

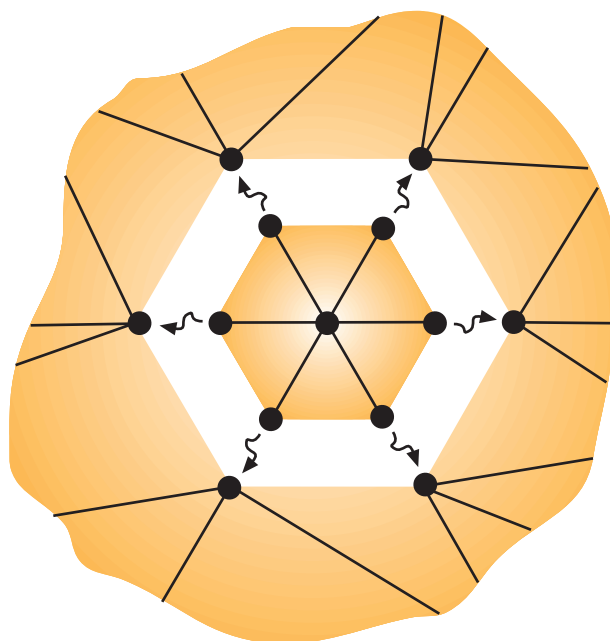


Figura 6.1 Pegar un cono a la frontera

Nuestro propósito es generalizar este método de construcción para el caso en que M no es 3-cadena y su frontera no es conexa.

Primero, vamos a extraer de M un conjunto T de $\frac{n}{3}$ ternas disjuntas, obteniendo una nueva 3-gráfica M' . Observe que T es una partición de los vértices de M y por tanto, la traza de todo vértice en M' es la unión de dos árboles disjuntos.

Deseamos encontrar un ciclo C sobre los vértices de M' pero no cualquiera, uno que satisfaga la siguiente condición: si v es un vértice del ciclo C y v^- , v^+ son los vértices adyacentes a v en C , entonces v^- y v^+ no están en la misma componente conexa de la gráfica $Tr_{M'}(v)$.

Si M' posee un ciclo con estas propiedades, entonces pegando un cono de ternas con centro en un nuevo vértice a C , obtenemos una 3-gráfica \widetilde{M} con $n+1$ vértices que satisface la siguiente propiedad.

Proposición 6.1 \widetilde{M} es una 3-gráfica localmente árbol.

Demostración. Sea $*$ el nuevo vértice, la traza de $*$ en \widetilde{M} es el ciclo C . Sea v cualquier otro vértice en \widetilde{M} . Los vértices v^- y v^+ están en componentes distintas de $Tr_{M'}(v)$ (de hecho, estas dos componentes son árboles) y como están unidos por las aristas $\{*, v^-\}$ y $\{*, v^+\}$, entonces la traza de v en \widetilde{M} es un árbol. ■

El resto de este capítulo está dedicado a la construcción de 3-gráficas localmente árboles mediante el método expuesto en esta sección. Estas resultarán ser tensas y por tanto, 3-árboles mínimos del tamaño requerido.

6.2 El caso 4 mod 6

Consideremos las 3-cadenas tensas de orden $n \equiv 3 \pmod{6}$ construidas en la sección 4.1. Recuerde que $G_t = \{\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t, \Delta\}$ donde t es impar, $\Delta = \Delta_t^1 \cup \Delta_t^2 \cup \Delta_t^3$ y

$$\begin{aligned} \Delta_t^1 &= \{\{0x, 1x, 2x\} \mid x \in \mathbb{Z}_t\}, \\ \Delta_t^2 &= \left\{ \left\{ ax, ay, \left(a + 1, \frac{x+y}{2}\right) \right\} \mid \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}_3, \\ x, y \in \mathbb{Z}_t \end{array} \right\} \text{ y} \\ \Delta_t^3 &= \left\{ \left\{ ax, ay, \left(a + 1, \frac{x+y+1}{2}\right) \right\} \mid \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}_3, \\ x, y \in \mathbb{Z}_t \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, el conjunto Δ_t^1 es un conjunto de ternas disjuntas en G_t (constituyen las t filas en $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$). Sea $G'_t = \{\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t, \Delta_t^2 \cup \Delta_t^3\}$ i.e. G'_t es G_t menos el conjunto de ternas Δ_t^1 .

Denotemos por $\partial G'_t$ la *gráfica frontera* de G'_t , es decir, la gráfica cuyas aristas son las parejas de vértices de G'_t que pertenecen exactamente a una terna de G'_t .

Por construcción, a cada vértice de $\partial G'_t$ inciden 2 aristas de la frontera de G_t y dos aristas de una de las ternas de Δ_t^1 . Luego, $\partial G'_t$ es una gráfica 4-regular.

Sea C la unión sobre todos los $x \in \mathbb{Z}_t$ de las cadenas $2x \rightarrow 0x \rightarrow 1x \rightarrow (2, x + 1/2)$. Como $1/2$ es un generador de \mathbb{Z}_t , C es un ciclo hamiltoniano, además $\{2x, 0x\}$ y $\{0x, 1x\}$ son parejas contenidas en ternas de Δ_t^1 y por la proposición 4.8, el par $\{1x, (2, x + 1/2)\}$ es una arista de la frontera de G_t . Luego C es un ciclo hamiltoniano en $\partial G'_t$. Demostremos que C cumple con la propiedad establecida en la sección anterior.

Proposición 6.2 *Para todo vértice v , los vértices v^- y v^+ definidos por la subcadena de C : $v^- \rightarrow v \rightarrow v^+$ están en distintas componentes conexas de la traza de v en G'_t .*

Demostración. Por las proposiciones 4.2, 4.7 y 4.8 se tiene que la traza de los vértices $0x$, $1x$ y $2x$ $x \in \mathbb{Z}_t$ en G'_t son de la forma:

$$\begin{aligned} Tr(0x) &: (1, x + 1/2) \dots 1x \approx 2x \dots (2, x - 1/2) \\ Tr(1x) &: (2, x + 1/2) \dots 2x \approx 0x \dots (0, x - 1/2) \\ Tr(2x) &: (0, x + 1/2) \dots 0x \approx 1x \dots (1, x - 1/2) \end{aligned}$$

donde \approx entre dos vértices significa que no hay arista entre ellos. Luego, la traza de cualquier vértice en G'_t son dos cadenas (resultado de extraer Δ_t^1 a G_t). Nótese que \mathbb{Z}_t tiene una acción natural sobre C adicionando $(0, 1/2)$. En C hay tres tipos de subcadenas de tamaño tres: $2x \rightarrow 0x \rightarrow 1x$, $0x \rightarrow 1x \rightarrow (2, x + 1/2)$ y $1x \rightarrow (2, x + 1/2) \rightarrow (0, x + 1/2)$ que son las que tienen como vértice central a un vértice de la fila 0, uno de la fila 1 y uno de la fila 2, respectivamente. Se puede comprobar en el diagrama anterior que los vértices $2x$ y $1x$ están en cadenas distintas de la traza de $0x$ en G'_t , análogamente para los vértices $0x$ y $(2, x + 1/2)$ en la traza de $1x$ y para los vértices $1x$ y $(0, x + 1/2)$ en la traza de $(2, x + 1/2)$. ■

Sea \widetilde{G}_t la 3-gráfica que resulta de agregar a G'_t un cono de ternas con centro en un nuevo vértice $(*)$ al ciclo C .

Corolario 6.1 \widetilde{G}_t es una casi 3-cadena con frontera conexa.

Demostración. Que \widetilde{G}_t es una casi 3-cadena es consecuencia directa de la proposición anterior. Veamos que su frontera es conexa. Claramente, $\partial\widetilde{G}_t$ es el conjunto de aristas \overline{C} en $\partial G'_t$ que no está en C . En $\partial G'_t$ hay seis tipos de aristas, tres asociados a las ternas de Δ_t^1 que son: $\{2x, 0x\}$, $\{0x, 1x\} \in C$ y $\{1x, 2x\} \in \overline{C}$ y tres tipos de aristas asociados a la frontera de G_t : $\{1x, (2, x + 1/2)\} \in C$ y $\{(2, x - 1/2), 0x\}$, $\{0x, (1, x + 1/2)\} \in \overline{C}$. Luego, \overline{C} es la unión sobre todos los $x \in \mathbb{Z}_t$ de las cadenas $(2, x - 1/2) \rightarrow 0x \rightarrow (1, x + 1/2) \rightarrow (2, x + 1/2)$. Nótese que \overline{C} es un ciclo hamiltoniano por las mismas razones que C . ■

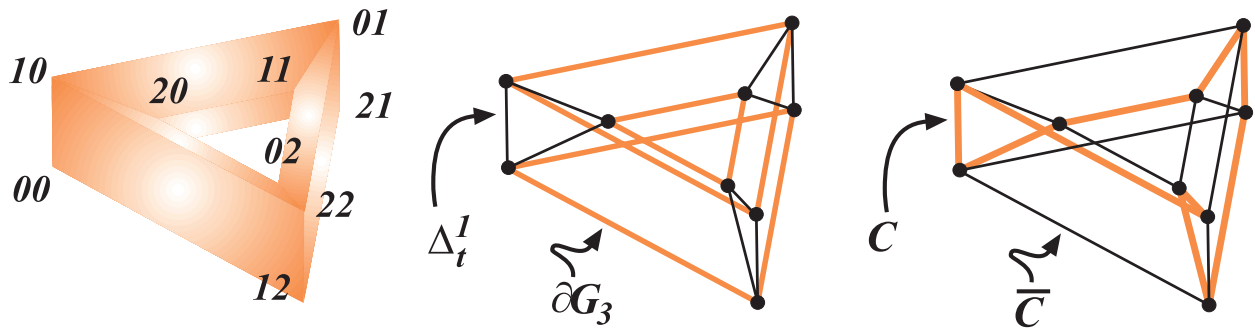


Figura 6.2 La gráfica frontera $\partial G'_3$

Teorema 6.1 \widetilde{G}_t es una 3-gráfica tensa.

Demostración. La base de la demostración es la prueba del teorema 4.1. Sea $f : \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t \cup \{*\} \rightarrow \{R, V, A\}$ una coloración de \widetilde{G}_t que no deja ternas heterocromáticas.

Si ningún vértice distinto de $*$ está coloreado de rojo, entonces $*$ tiene que estar coloreado de rojo. Luego alguna arista $\{v, v'\}$ de C es bicolor y la terna $\{v, *, v'\}$ es heterocromática, de aquí que la coloración es propia en $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$.

Nuevamente, las filas heterocromáticas tienen orientación ya que las ternas de Δ_t^1 no aparecen en la prueba de esta parte del teorema 4.1. Por el mismo argumento, si una fila es heterocromática, la que le sigue también lo es.

Si todas las filas son monocromáticas, en la subcadena de $C : 20 \rightarrow 00 \rightarrow 10 \rightarrow (2, 1/2)$ aparece cualquier bicoloración posible de una arista por lo que independientemente del color que se le dé al vértice $*$, tendremos una terna heterocromática.

Nótese que la proposición 4.7 también se satisface en \widetilde{G}_t . De aquí que si una fila es bicolor, la que le sigue no está coloreada con el tercer color.

Sea a una fila bicolorada rojo-verde. Nuevamente, podemos suponer que la fila $a + 1$ es monocromática roja y la fila $a + 2$ tiene vértices azules. La fila $a + 2$ no puede ser bicolor ya que el tercer color aparecería en la fila a . Supongamos que la fila $a + 2$ es monocromática azul. Sea v un vértice verde en la fila a y sea $v^- \rightarrow v \rightarrow v^+ \rightarrow v^{++}$ una subcadena en C que contiene a v . Nótese que v^- y v^{++} son azules y que v^+ es rojo, de aquí que independientemente del color de $*$ se tendría una terna heterocromática. Luego, la fila $a + 2$ es heterocromática y por tanto todas las filas son heterocromáticas.

Podemos suponer que las filas 0 y 1 tienen la misma orientación. Si la fila 0 no tiene dos vértices consecutivos con el mismo color, entonces como en la prueba del teorema 4.1, podemos concluir que los vértices en $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ están coloreados de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} -3 & -2 & -1 \end{array} \\ 0 : R V A R \dots R V A \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} -3 & -2 & -1 \end{array} \\ 1 : A R V A \dots A R V \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} -3 & -2 & -1 \end{array} \\ 2 : V A R V \dots V A R \end{array}$$

y $t \equiv 0 \pmod{3}$. De aquí que $\{00, 10\}$, $\{01, 11\}$ y $\{02, 12\}$ son aristas rojo-azul, verde-rojo y azul-verde respectivamente, en C y alguna de ellas forma con $*$ una terna heterocromática.

El caso en que la fila 0 tiene dos vértices consecutivos con el mismo color se demuestra de la misma manera que en el teorema 4.1. ■

6.3 El caso 1 mod 12

Sean $n = 12s$ y H_n el 3-árbol construido en la sección 5.2. Recuerde que

$$H_n = (\mathbb{Z}_n, (\{\varepsilon_a \mid a \in \mathbb{A}_n\} \cup \{\zeta_b, \eta_b \mid b \in \mathbb{B}_n\})) + \mathbb{Z}_n$$

donde

$$\varepsilon_a = \{0, 8s, 2a\}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_b &= \{0, 2, 3 - 4b\} \\
\eta_b &= \{0, 8s + 2b, 4b - 1\} \\
\mathbb{A}_n &= \{1, \dots, 2s\} \subset \mathbb{Z}_n \\
\mathbb{B}_n &= \{1, \dots, s\} \subset \mathbb{A}_n
\end{aligned}$$

. Consideremos el ciclo $C = (\mathbb{Z}_n, \{\{x - 1, x\} \mid x \in \mathbb{Z}_n\})$, se puede comprobar que la única terna en H_n que contiene a la pareja $\{x - 1, x\}$ es $\zeta_1 + x = \{x, x + 2, x - 1\}$ luego C es un ciclo hamiltoniano en ∂H_n . Por otra parte, no es difícil comprobar que $\varepsilon_{2s} + \mathbb{Z}_n$ es un conjunto de ternas disjuntas en H_n

Sea \widetilde{H}_n la 3-gráfica que se obtiene de extraer a de H_n el conjunto de ternas $\varepsilon_{2s} + \mathbb{Z}_n$ y pegar un cono de ternas con centro en un nuevo vértice $*$ al ciclo C i.e.

$$\widetilde{H}_n = (\mathbb{Z}_n \cup \{*\}, (\{\varepsilon_a \mid a \in \mathbb{A}_n \setminus \{2s\}\} \cup \{\zeta_b, \eta_b \mid b \in \mathbb{B}_n\} \cup \{*, 0, 1\}) + \mathbb{Z}_n)$$

donde por definición $* + x = *$ para todo $x \in \mathbb{Z}_n$.

Ahora demostraremos que C satisface la propiedad que hace posible que la traza de todo vértice $x \in \mathbb{Z}_n$ en \widetilde{H}_n sea conexa.

Proposición 6.3 *Para todo $x \in \mathbb{Z}_n$, los vértices $x - 1$ y $x + 1$ están en distintas componentes conexas de la traza de x en H'_n .*

Demostración. Como H_n es 3-árbol mínimo, la traza del vértice 0 en H_n es un árbol. Por otra parte, si consideramos las ternas:

$$\zeta_1 + 1, \eta_1, \varepsilon_{2s-1} - 4s + 2, \varepsilon_1 + 4s, \varepsilon_{2s}, \varepsilon_1 \text{ y } \zeta_1$$

se puede comprobar que la subcadena:

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 8s + 2 \rightarrow 4s + 2 \rightarrow 4s \rightarrow 8s \rightarrow 2 \rightarrow -1$$

está contenida en $Tr_{H_n}(0)$. Luego, en H'_n los vértices 1 y -1 están en componentes distintas de $Tr_{H'_n}(0)$ ya que de otra manera, $Tr_{H_n}(0)$ contiene un ciclo, lo cual es imposible. Finalmente por la proposición 1.5, para todo $x \in \mathbb{Z}_n$ se tiene que los vértices $x - 1$ y $x + 1$ están en componentes distintas de $Tr_{H'_n}(x)$, como se quería. ■

Corolario 6.2 \widetilde{H}_n es una 3-gráfica casi localmente árbol.

Teorema 6.2 \widetilde{H}_n es tensa.

Demostración. (Por reducción al absurdo)

Supongamos que f es una coloración no heterocromática de \widetilde{H}_n . Como la traza de $*$ es un ciclo, f es propia en \mathbb{Z}_n . Por el teorema 5.2 H_n es tensa luego, existe una terna $t \in \varepsilon_{2s} + \mathbb{Z}_n$ tal que $f(t) = \{R, V, A\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $t = \{0, 4s, 8s\}$, $f(0) = R$, $f(4s) = V$ y $f(8s) = A$.

Caso 1. $\exists x \in \{0, 4s, 8s\}$ tal que $f(x) = f(x+2)$.

Caso 2. $\forall x \in \{0, 4s, 8s\}$ se tiene que $f(x) \neq f(x+2)$.

Análisis del Caso 1.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$. Luego, $f(0) = f(2) = R$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 8s = \{8s, 4s, 8s + 2\}, \\ \varepsilon_{2s-1} + 2 = \{2, 8s + 2, 4s\} \in \widetilde{H}_n \\ f(2) = R, f(4s) = V, f(8s) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s + 2) = V$$

Veamos que $f(2s) = R$. Para $s = 1$, $f(2s) = f(2) = R$, si $s \geq 2$ consideremos las ternas siguientes

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_s = \{0, 8s, 2s\}, \varepsilon_{s-1} + 2 = \{2, 8s + 2, 2s\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = R, f(8s) = A, f(8s + 2) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(2s) = R$$

Luego,

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 + 8s = \{8s, 8s + 2, 8s - 1\}, \\ \eta_s + 4s = \{4s, 8s - 1, 2s\} \in \widetilde{H}_n \\ f(2s) = R, f(4s) = V, f(8s) = A, f(8s + 2) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s - 1) = V$$

Si consideremos la subcadena siguiente en la traza de $*$:

$$8s - 1 \rightarrow 8s \rightarrow 8s + 1 \rightarrow 8s + 2$$

Como f es una coloración no heterocromática de \widetilde{H}_n el vértice $8s + 1$ no puede tener el color R . Por otra parte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 4s = \{4s, 0, 4s + 2\}, \\ \varepsilon_{2s-1} + 4s + 2 = \{4s + 2, 2, 8s\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = R, f(4s) = V, f(8s) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(4s + 2) = R$$

Luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_s + 8s - 1 = \{8s - 1, 8s + 1, 4s + 2\} \in \widetilde{H}_n \\ f(4s + 2) = R, f(8s - 1) = V, f(8s + 1) \neq R \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s + 1) = V$$

Si $s = 1$ entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 + 9 = \{9, 11, 8\}, \eta_1 + 8 = \{8, 11, 6\} \in \widetilde{H}_{12} \\ f(6) = R, f(8) = A, f(9) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(11) = A$$

y la terna $\eta_1 + 11 = \{11, 2, 9\} \in \widetilde{H}_{12}$ es heterocromática. (Contradicción).

Finalmente, para $s \geq 2$ se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2s-2} = \{0, 8s, 4s - 4\}, \\ \varepsilon_{2s-3} + 2 = \{2, 8s + 2, 4s - 4\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = R, f(8s) = A, f(8s + 2) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(4s - 4) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2s-2} + 4s = \{4s, 0, 8s - 4\}, \\ \varepsilon_2 + 8s - 4 = \{8s - 4, 4s - 4, 8s\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(4s - 4) = R, f(4s) = V, f(8s) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s - 4) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 + 8s = \{8s, 8s + 3, 4s + 2\}, \\ \eta_2 + 8s - 4 = \{8s - 4, 8s + 3, 4s\} \in \widetilde{H}_n \\ f(4s) = V, f(4s + 2) = R, f(8s - 4) = R, f(8s) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s + 3) = R$$

y la terna $\zeta_1 + 8s + 1 = \{8s + 1, 8s + 3, 8s\}$ es heterocromática. (Contradicción).

Análisis del Caso 2.

Considerando las ternas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \{0, 8s, 2\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(8s) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) \neq V$$

y para no estar en el caso 1 se tiene que $f(2) = A$. Con un argumento análogo, $f(4s + 2) = R$ y $f(8s + 2) = V$.

El caso especial $s = 1$, $n = 12$ se analizará posteriormente. Supongamos que $s \geq 2$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 2 = \{2, 8s + 2, 4\}, \varepsilon_2 = \{0, 8s, 4\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = A, f(8s) = A, f(8s + 2) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(4) = A$$

Luego, usando el automorfismo $x \mapsto x - 2$ reducimos la demostración al caso 1, con lo que termina la prueba para $s \geq 2$.

Para $s = 1$, se tiene que $f(0, 6) = R$, $f(2, 8) = A$ y $f(4, 10) = V$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 + 2 = \{2, 4, 1\} \in \widetilde{H_{12}} \\ f(2) = A, f(4) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) \neq R$$

Consideremos los dos posibles colores del vértice 1.

Caso 2.1. $f(1) = V$.

Si consideremos la subcadena siguiente en la traza de $*$:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

Como f es una coloración no heterocromática de $\widetilde{H_{12}}$ el vértice 3 no puede tener el color R . Por otra parte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 + 4 = \{4, 6, 3\} \in \widetilde{H_{12}} \\ f(3) \neq R, f(4) = V, f(6) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(3) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 + 3 = \{3, 5, 2\}, \zeta_1 + 6 = \{6, 8, 5\} \in \widetilde{H_{12}} \\ f(2) = A, f(3) = V, f(6) = R, f(8) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(5) = A$$

Luego, las aristas en $Tr_{\widetilde{H_{12}}}(*) : \{0, 1\}$, $\{1, 2\}$ y $\{5, 6\}$ tienen los 3 pares posibles de colores y como quiera que se colorea al vértice $*$, aparecerá una terna heterocromática. (Contradicción).

Caso 2.2. $f(1) = A$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 + 1 = \{1, 3, 0\}, \zeta_1 + 4 = \{4, 6, 3\} \in \widetilde{H_{12}} \\ f(0) = R, f(1) = A, f(4) = V, f(6) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(3) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = \{0, 2, 11\}, \eta_1 + 1 = \{1, 4, 11\} \in \widetilde{H_{12}} \\ f(0) = R, f(1) = A, f(2) = A, f(4) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(11) = A$$

Luego, al igual que en el caso anterior, las parejas de aristas en $Tr_{\widetilde{H_{12}}}(*) : \{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ y $\{10, 11\}$ tienen los 3 pares posibles de colores. (Contradicción). ■

Es interesante observar que la proposición 6.3 y el corolario 6.2 son consecuencia directa del teorema 6.2 y del hecho de que el tamaño de $\widetilde{H_n}$ es $\frac{n^2}{3}$.

6.4 El caso 7 mod 12

Este caso es similar al caso 1 mod 12 por lo que usaremos las ideas desarrolladas en la sección anterior.

Sean $n = 12s+6$, $s \neq 1$ y H_n el 3-árbol construido en la sección 5.3. Recuerde que

$$H_n = (\mathbb{Z}_n, (\{\varepsilon_a \mid a \in \mathbb{A}_n\} \cup \{\zeta_b, \eta_b \mid b \in \mathbb{B}_n\} \cup \delta) + \mathbb{Z}_n)$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \{0, 8s + 4, 2a\} \\ \zeta_b &= \{0, 2, 3 - 4b\} \\ \eta_b &= \{0, 8s + 2b + 6, 4b - 1\} \\ \delta &= \{0, 2, 6s + 5\} \\ \mathbb{A}_n &= \{1, \dots, 2s + 1\} \subset \mathbb{Z}_n \\ \mathbb{B}_n &= \{1, \dots, s\} \subset \mathbb{A}_n \end{aligned}$$

Consideremos el ciclo $C = (\mathbb{Z}_n, \{\{x - 1, x\} \mid x \in \mathbb{Z}_n\})$, se puede comprobar que la única terna que contiene a la pareja $\{x - 1, x\}$ es $\zeta_1 + x = \{x, x + 2, x - 1\}$ luego C es un ciclo hamiltoniano en ∂H_n . Por otra parte, no es difícil comprobar que $\varepsilon_{2s+1} + \mathbb{Z}_n$ es un conjunto de ternas disjuntas en H_n .

Sea \widetilde{H}_n la 3-gráfica que se obtiene de extraer el conjunto de ternas $\varepsilon_{2s+1} + \mathbb{Z}_n$ de H_n y pegar un cono de ternas con centro en un nuevo vértice $*$ al ciclo C i.e.

$$\widetilde{H}_n = (\mathbb{Z}_n \cup \{*\}, (\{\varepsilon_a \mid a \in \mathbb{A}_n \setminus \{2s + 1\}\} \cup \{\zeta_b, \eta_b \mid b \in \mathbb{B}_n\} \cup \{*, 0, 1\}) + \mathbb{Z}_n)$$

Teorema 6.3 \widetilde{H}_n es un 3-árbol mínimo.

Demostración. Observe que $|\varepsilon_{2s+1} + \mathbb{Z}_n| = \frac{n}{3}$ y que la traza del vértice $*$ es un ciclo de orden n , luego el tamaño de \widetilde{H}_n es

$$\frac{n(n-2)}{3} - \frac{n}{3} + n = \frac{n^2}{3}$$

que coincide con el tamaño requerido para un 3-árbol mínimo de orden $n + 1$.

Para probar que \widetilde{H}_n es tensa vamos a suponer que $s \geq 2$ y por tanto, $n \geq 30$. El caso en que $n = 6$ es muy simple y se lo dejamos al lector interesado.

Sea f una coloración no heterocromática de \widetilde{H}_n . Observe que existe un vértice x en \mathbb{Z}_n tal que $f(x) = f(*)$ ya que en otro caso, hay dos vértices consecutivos $y, y + 1$ tales que $f(y) \neq f(y + 1)$ y por tanto la terna $\{*, y, y + 1\}$ nos conduce a una contradicción.

Luego, f es propia en \mathbb{Z}_n . Por el teorema 5.4 hay una terna heterocromática $\varepsilon_{2s+1} + x \in H_n$. Como $x \mapsto x + 1$ es un automorfismo de H_n y \widetilde{H}_n podemos suponer que $x = 0$. Sea $f(0) = R$, $f(4s + 2) = V$ y $f(8s + 4) = A$.

Ahora consideraremos dos casos.

Caso 1. $\exists x \in \{0, 4s + 2, 8s + 4\}$ tal que $f(x) = f(x + 2)$.

Caso 2. $\forall x \in \{0, 4s + 2, 8s + 4\}$ se tiene que $f(x) \neq f(x + 2)$.

Análisis del Caso 1.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$. Luego, $f(0) = f(2) = R$.

Ahora determinaremos el color de un conjunto de vértices que nos conducirán inevitablemente a la existencia de una terna heterocromática.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2s-2} + 2 = \{2, 8s + 6, 4s - 2\}, \\ \varepsilon_{2s-1} = \{0, 8s + 4, 4s - 2\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = R, f(8s + 4) = A, f(8s + 6) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(4s - 2) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2s-1} + 4s + 2 = \{4s + 2, 0, 8s\}, \\ \varepsilon_2 + 8s = \{8s, 4s - 2, 8s + 4\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(4s - 2) = R, f(4s + 2) = V, f(8s + 4) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 8s + 4 = \{8s + 4, 4s + 2, 8s + 6\}, \\ \varepsilon_{2s} + 2 = \{2, 8s + 6, 4s + 2\} \in \widetilde{H}_n \\ f(2) = R, f(4s + 2) = V, f(8s + 4) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s + 6) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 + 8s + 4 = \{8s + 4, 8s + 6, 8s + 3\}, \\ \eta_1 + 8s = \{8s, 4s + 2, 8s + 3\} \in \widetilde{H}_n \\ f(4s + 2) = V, f(8s) = R, f(8s + 4) = A, f(8s + 6) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s + 3) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 2 = \{2, 8s + 6, 4\}, \varepsilon_2 = \{0, 8s + 4, 4\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = R, f(8s + 4) = A, f(8s + 6) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(4) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 + 4s + 2 = \{4s + 2, 0, 4s + 6\}, \\ \varepsilon_{2s-1} + 4s + 6 = \{4s + 6, 4, 8s + 4\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(4) = R, f(4s + 2) = V, f(8s + 4) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(4s + 6) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2s-3} + 2 = \{2, 8s + 6, 4s - 4\}, \\ \varepsilon_{2s-2} = \{0, 8s + 4, 4s - 4\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = R, f(8s + 4) = A, f(8s + 6) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(4s - 4) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2s-2} + 4s + 2 = \{4s + 2, 0, 8s - 2\}, \\ \varepsilon_3 + 8s - 2 = \{8s - 2, 4s - 4, 8s + 4\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(4s - 4) = R, f(4s + 2) = V, f(8s + 4) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s - 2) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2s-1} + 2 = \{2, 8s + 6, 4s\}, \varepsilon_{2s} = \{0, 8s + 4, 4s\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = R, f(8s + 4) = A, f(8s + 6) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(4s) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2s} + 4s + 2 = \{4s + 2, 0, 8s + 2\}, \\ \varepsilon_1 + 8s + 2 = \{8s + 2, 4s, 8s + 4\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(4s) = R, f(4s + 2) = V, f(8s + 4) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s + 2) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2s} + 8s + 4 = \{8s + 4, 4s + 2, 12s + 4\}, \\ \varepsilon_1 + 4s = \{4s, 12s + 4, 4s + 2\} \in \widetilde{H}_n \\ f(4s) = R, f(4s + 2) = V, f(8s + 4) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(12s + 4) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_s + 12s + 4 = \{12s + 4, 0, 8s + 7\}, \\ \eta_1 + 8s + 4 = \{8s + 4, 4s + 6, 8s + 7\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(4s + 6) = R, f(8s + 4) = A, f(12s + 4) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s + 7) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 + 8s + 5 = \{8s + 5, 8s + 7, 8s + 4\}, \\ \eta_2 + 8s - 2 = \{8s - 2, 4s + 2, 8s + 5\} \in \widetilde{H}_n \\ f(4s + 2) = V, f(8s - 2) = R, \\ f(8s + 4) = A, f(8s + 7) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s + 5) = R$$

Luego, como quiera que se colorea al vértice *, una de las ternas:

$$\{*, 8s + 2, 8s + 3\}, \{*, 8s + 3, 8s + 4\} \text{ ó } \{*, 8s + 4, 8s + 5\}$$

es heterocromática, lo cual es imposible.

Análisis del Caso 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \{0, 8s + 4, 2\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(8s + 4) = A, f(2) \neq R \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) = A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 4s + 2 = \{4s + 2, 0, 4s + 4\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(4s + 2) = V, f(4s + 4) \neq V \end{array} \right\} \Rightarrow f(4s + 4) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 8s + 4 = \{8s + 4, 4s + 2, 8s + 6\} \in \widetilde{H}_n \\ f(4s + 2) = V, f(8s + 4) = A, f(8s + 6) \neq A \end{array} \right\} \Rightarrow f(8s + 6) = V$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 2 = \{2, 8s + 6, 4\}, \varepsilon_2 = \{0, 8s + 4, 4\} \in \widetilde{H}_n \\ f(0) = R, f(2) = A, f(8s + 4) = A, f(8s + 6) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(4) = A$$

Usando el automorfismo $x \mapsto x - 2$ reducimos la demostración al caso 1. ■

6.4.1 El caso especial de orden 19

Para resolver este caso utilizaremos la 3-gráfica T_{18} construida en la subsección 5.3.1. Recuerde que

$$T_{18} = (\mathbb{Z}_{18}, \{\varepsilon_a, \xi_a \mid a \in \{1, 2, 3\}\} + \mathbb{Z}_{18})$$

donde

$$\varepsilon_a = \{0, 12, 2a\}, \quad \xi_a = \{0, 2^a, 6a + 5\}$$

Sea \widetilde{T}_{18} la 3-gráfica que resulta de extraer de T_{18} el conjunto de ternas $\varepsilon_3 + \mathbb{Z}_{18}$ y agregar un nuevo vértice $*$ con el conjunto de ternas: $\{\{*, x, x + 1\} \mid x \in \mathbb{Z}_{18}\}$ i.e.

$$\widetilde{T}_{18} = (\mathbb{Z}_{18} \cup \{*\}, (\{\varepsilon_a \mid a \in \{1, 2\}\} \cup \{\xi_a \mid a \in \{1, 2, 3\}\} \cup \{*, 0, 1\}) + \mathbb{Z}_{18})$$

donde por definición $* + x = *$ para todo $x \in \mathbb{Z}_{18}$.

Teorema 6.4 \widetilde{T}_{18} es un 3-árbol con 108 ternas.

Demostración. Comprobar que \widetilde{T}_{18} tiene el número requerido de ternas es simple y se lo dejamos al lector.

Veamos que \widetilde{T}_{18} es tenso. Sea f una coloración no heterocromática de \widetilde{T}_{18} .

Observe que existe un vértice x en \mathbb{Z}_{18} tal que $f(x) = f(*)$ ya que en otro caso, hay dos vértices consecutivos $y, y + 1$ tales que $f(y) \neq f(y + 1)$ y por tanto la terna $\{*, y, y + 1\}$ nos conduce a una contradicción.

Luego, f es propia en \mathbb{Z}_{18} . Por el teorema 5.4 hay una terna heterocromática $\varepsilon_3 + x \in T_{18}$. Como $x \mapsto x + 1$ es un automorfismo de T_{18} y \widetilde{T}_{18} podemos suponer que $x = 0$. Sea $f(0) = R, f(6) = V$ y $f(12) = A$.

Ahora consideraremos dos casos.

Caso 1. $\exists x \in \{0, 6, 12\}$ tal que $f(x) = f(x + 2)$.

Caso 2. $\forall x \in \{0, 6, 12\}$ se tiene que $f(x) \neq f(x + 2)$.

Análisis del Caso 1.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$. Luego, $f(0) = f(2) = R$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 6 = \{6, 0, 8\}, \varepsilon_2 + 8 = \{8, 2, 12\} \in \widetilde{T}_{18} \\ f(0) = R, f(2) = R, f(6) = V, f(12) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(8) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 + 6 = \{6, 8, 17\}, \xi_3 + 12 = \{12, 2, 17\} \in \widetilde{T}_{18} \\ f(2) = R, f(6) = V, f(8) = R, f(12) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(17) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 12 = \{12, 6, 14\}, \varepsilon_2 + 2 = \{2, 14, 6\} \in \widetilde{T}_{18} \\ f(2) = R, f(6) = V, f(12) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(14) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_2 + 13 = \{13, 17, 12\}, \xi_2 + 14 = \{14, 0, 13\} \in \widetilde{T}_{18} \\ f(0) = R, f(12) = A, f(14) = V, f(17) = R \end{array} \right\} \Rightarrow f(13) = R$$

Por otra parte, si $f(11) = V$, independientemente del color del vértice $*$, una de la ternas: $\{*, 11, 12\}, \{*, 12, 13\}$ ó $\{*, 13, 14\}$ nos conduce a una contradicción.

Luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 14 = \{14, 8, 16\}, \varepsilon_2 + 12 = \{12, 6, 16\} \in \widetilde{T}_{18} \\ f(6) = V, f(8) = R, f(12) = A, f(14) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(16) = V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_2 + 12 = \{12, 16, 11\} \in \widetilde{T}_{18} \\ f(12) = A, f(16) = V, f(11) \neq V \end{array} \right\} \Rightarrow f(11) = A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_2 + 7 = \{7, 11, 6\}, \xi_2 + 8 = \{8, 12, 7\} \in \widetilde{T}_{18} \\ f(6) = V, f(8) = R, f(11) = A, f(12) = A \end{array} \right\} \Rightarrow f(7) = A$$

y una de las ternas: $\{*, 6, 7\}$, $\{*, 7, 8\}$ ó $\{*, 13, 14\}$ es heterocromática, lo cual es imposible.

Análisis del Caso 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \{0, 12, 2\} \in \widetilde{T}_{18} \\ f(0) = R, f(12) = A, f(2) \neq R \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) = A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 6 = \{6, 0, 8\} \in \widetilde{T}_{18} \\ f(0) = R, f(6) = V, f(8) \neq V \end{array} \right\} \Rightarrow f(8) = R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 12 = \{12, 6, 14\} \in \widetilde{T}_{18} \\ f(6) = V, f(12) = A, f(14) \neq A \end{array} \right\} \Rightarrow f(14) = V$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + 2 = \{2, 14, 4\}, \varepsilon_2 = \{0, 12, 4\} \in \widetilde{T}_{18} \\ f(0) = R, f(2) = A, f(12) = A, f(14) = V \end{array} \right\} \Rightarrow f(4) = A$$

Usando el automorfismo $x \mapsto x - 2$ reducimos la demostración al caso 1. ■

Bibliografía

- [1] I. ANDERSON. *Combinatorial Designs: Construction Methods*. John Wiley & Sons (1990).
- [2] J. L. AROCHA, J. BRACHO Y V. NEUMANN-LARA. *On the minimum size of tight hypergraphs*. **J. Graph Theory** **16**. No. 4, 319-326 (1992).
- [3] J. L. AROCHA, J. BRACHO Y V. NEUMANN-LARA. *Tight and untight triangulations of surfaces by complete graphs*. **J. Combin. Theory Ser B**, **63**. No.2, 185-199 (1995).
- [4] J. L. AROCHA Y J. TEY. *The size of minimum 3-trees: Cases 3 and 4 mod 6*. **J. Graph Theory**, **30**(3), 157–166 (1999).
- [5] R. L. GRAHAM. *Rudiments of Ramsey Theory*. AMS Providence RI (1981).
- [6] L. LOVASZ. *Topological and algebraic methods in graph theory en Graph theory and related topics*. Academic Press, New York (1979).
- [7] B. LLANO. *Ecuaciones tensas y no tensas*. Tesis Doctoral (1996).
- [8] G. RINGEL. *Map Color Theorem*. Springer Verlag (1974).
- [9] F. STERBOUL. *A problem in constructive combinatorics and related questions*. **Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai**, volume **18**. Combinatorics, 1049–1064. Keszthely Hungary (1976).
- [10] F. STERBOUL. *Smallest 3-graph having a 3-colored edge in every k-coloring*. **Discrete Mathematics**, **27**, 205–210 (1979).