

3-árboles tensos mínimos:
Caso 3 mod 6.

Joaquín Tey

Resumen

En este trabajo describimos para cada $n \equiv 3 \pmod{6}$, un 3-árbol con n vértices y $\frac{n(n-2)}{3}$ aristas, lo cual resuelve parcialmente una conjetura de Arocha, Bracho y Neumann-Lara.

Contenido

1	Introducción	2
2	De la tensión en hipergráficas a las triangulaciones de superficies	6
2.1	Tensión en hipergráficas	6
2.1.1	Una familia infinita de 3-árboles mínimos .	13
2.2	Triangulaciones de superficies cerradas	16
2.2.1	Caso $n \equiv 4 \pmod{12}$	24
2.2.2	Caso $n \equiv 10 \pmod{12}$	26
2.3	Superficies trianguladas tensas y no tensas	27
2.3.1	Método de acoplamiento	28
3	3-árboles mínimos	37
3.1	Caso $n \equiv 3 \pmod{6}$	37
3.2	Caso $n \equiv 4 \pmod{6}$	47
3.3	Sobre la orientabilidad	53

Capítulo 1

Introducción

Nuestro trabajo aborda el tema de la tensión en hipergráficas regulares, concepto que aparece por primera vez a principios de los 90 (ver [2]) y que constituye una generalización natural de la definición de conexidad para gráficas.

Diremos que una hipergráfica es regular si todas sus hiperaristas tienen la misma cardinalidad, si esta cardinalidad es k , llamaremos a la hipergráfica una k – gráfica.

Una k -gráfica es tensa si para cualquier coloración de sus vértices utilizando k colores, existe al menos una hiperarista heterocromática (donde se utilizan todos los colores). Como se puede observar, para $k = 2$, estamos en presencia de una de las caracterizaciones de conexidad para las gráficas usuales.

El problema que nos interesa es el estudio de los 3 – árboles (3-gráficas tensas minimales, en el sentido de que si quitamos una terna, dejan de ser tensas). Una vez más, para $k = 2$, un 2-árbol es un árbol en el sentido usual. Es interesante observar que a diferencia de los árboles en gráficas, que tienen el mismo tamaño (número de aristas) para un número fijo de vértices,

en el caso de los 3-árboles ($k = 3$) no tienen siempre el mismo tamaño.

En [2] se da una cota inferior para el número mínimo de ternas en un 3-árbol de orden n (Φ_n) y se conjetura que siempre se alcanza. Ahí se demuestra que $\Phi_n \geq \left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil$ y podemos encontrar un elegante método para construir una familia infinita de 3-árboles mínimos (alcanzan la cota) para todo primo p , tal que el número de vértices es $n = (p - 1)/2$.

De aquí que nos preguntemos si realmente la conjetura es cierta para todo n . Para continuar, es importante conocer que la traza de un vértice v en una 3-gráfica es la gráfica $Tr(v) = (V \setminus \{v\}, E)$, donde $\{x, y\} \in E$, si y sólo si $\{v, x, y\}$ es una terna en la 3-gráfica. La primera observación es que si existe un 3-árbol mínimo y $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$, entonces la traza de todos los vértices son árboles, si $n \equiv 1 \pmod{3}$ una de las trazas contiene un ciclo y el resto árboles. Si consideramos el caso particular en que los árboles son cadenas, entonces a la 3-gráfica la llamaremos *3-cadena* y representa la inmersión de una gráfica completa en una superficie con frontera, donde todos los vértices yacen sobre la frontera (caso $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$) en otro caso, cuando una de las trazas es un ciclo, todos los vértices yacen sobre la frontera, excepto uno y denominaremos a la 3-gráfica *casi 3-cadena*. En el Capítulo 2 se abordará este tema con detalle.

Contando con esta interpretación topológica de las 3-cadenas, es natural que analicemos con detalle los trabajos de Ringel, White y otros (ver [7]), sobre el número cromático de una superficie cerrada S , definido como: $\chi(S) = \max_{G \subset S} \chi(G)$, donde el máximo se toma sobre el número cromático de todas las posi-

bles gráficas que pueden ser dibujadas sobre la superficie S . La solución de este problema consiste esencialmente en encontrar el máximo n tal que la gráfica completa \mathbb{K}_n puede ser dibujada en la superficie S (S distinta de la esfera). Es interesante observar que para el caso en que la superficie cerrada es una esfera, estamos en presencia del Problema de los Cuatro Colores, que establece originalmente que son suficientes 4 colores para colorear los “países” de cualquier mapa sobre la esfera de manera que países con frontera común (distinta de un punto) están coloreados de diferente color. En la terminología adoptada anteriormente, el problema consiste en probar que el número cromático de la esfera es 4.

No es difícil observar que si tomamos la inmersión de una gráfica completa \mathbb{K}_{n+1} en una superficie cerrada y le extraemos un vértice y todas las ternas que lo contienen, obtenemos una 3-cadena, es decir, tenemos una 3-gráfica candidata a ser 3-árbol mínimo (aquí las ternas son los triángulos determinados por la triangulación de la superficie).

Esto realmente es sorprendente, a primera vista podríamos pensar que hemos dado un gran paso para probar la conjetura antes mencionada, ya que tenemos un buen número de 3-gráficas candidatas a 3-árboles y podríamos investigar su comportamiento con respecto a la tensión.

Desafortunadamente, probar tensión para $k \geq 3$ parece ser un problema difícil, es necesario conocer muy bien la estructura de la k -gráfica para atacar este problema con éxito.

Hasta el momento no sabemos si son tensas o no estas 3-gráficas candidatas a ser 3-árboles mínimos.

Antes de pasar al resultado principal de nuestro trabajo, cerramos el Capítulo 2 haciendo una exposición de los resultados desarrollados en [3], donde se construyen familias infinitas de 3-gráficas tensas y no tensas, inducidas por inmersiones de gráficas completas en superficies cerradas y con frontera.

Finalmente, en el Capítulo 3 exponemos un método para construir 3-árboles mínimos para $n \equiv 3, 4 \pmod{6}$.

Para el caso $n \equiv 3 \pmod{6}$, los 3-árboles obtenidos pueden ser interpretados como inmersiones de gráficas completas en superficies no orientables con frontera, de manera que todo vértice yace sobre la frontera (ver [3]). Se caracterizan las superficies obtenidas de acuerdo al número de componentes de la frontera. Ocurre que para $n \equiv 3, 15 \pmod{18}$ la frontera es conexa, por lo que se puede obtener un 3-ciclo tenso (ver [3]) pegando un cono de triángulos con centro en un nuevo vértice. Sería interesante investigar si las 3-gráficas obtenidas son isomorfas o no a las correspondientes en [7] (ver Capítulo 2, Sección 2.2).

Es interesante observar que las 3-cadenas obtenidas son extensiones naturales de sistemas de ternas de Steiner construidos utilizando el método de Skolem (ver [1]).

La solución para el caso $n \equiv 4 \pmod{6}$ se obtiene mediante una construcción topológica a partir del caso anterior. Aquí todos los vértices, excepto uno, yacen sobre la frontera (conexa) de una superficie no orientable.

Como se puede ver, la conjetura que nos motivó este trabajo no se ha probado totalmente. Sabemos que para $n \equiv 0 \pmod{6}$ es cierta. Los casos $n \equiv 1 \pmod{6}$ y $n \equiv 2 \pmod{3}$ constituyen el próximo reto. ¡Mucha suerte al que los ataque!

Capítulo 2

De la tensión en hipergráficas a las triangulaciones de superficies

En este capítulo se dan los primeros resultados sobre tensión (ver [2]). A partir del problema de construir 3-árboles mínimos nos introducimos de manera natural en el estudio del número cromático de superficies (ver [7]) y hacemos énfasis en los resultados sobre tensión que están estrechamente relacionados con el tema mencionado anteriormente.

2.1 Tensión en hipergráficas

En esta sección vamos a ver con detalle el concepto de tensión en hipergráficas y los primeros resultados obtenidos en esta línea de trabajo. En la exposición nos apoyaremos fundamentalmente en [2].

Introduciremos el concepto de número heterocromático de una hipergráfica, inspirado en la inconexión acíclica libre de

triángulos dirigidos, en torneos.

Entenderemos por una t – *coloración* de una hipergráfica $H = (V, E)$, una función sobreyectiva de V a un conjunto de cardinalidad t . Una t – *coloración* f *separa* a la hiperarista $\alpha \in E$ si las imágenes por f de los vértices de α son distintas dos a dos. Diremos que f es *heterocromática* si f separa alguna hiperarista de H . El número heterocromático de H , denotado por $hc(H)$, es el máximo t para el cual existe una $(t-1)$ -coloración que no es heterocromática.

Nótese que $hc(H) \leq n + 1$ donde n denota el número de vértices de H . Por otra parte, suponiendo que $E \neq \emptyset$, se tiene que $hc(H) \geq \min \{|\alpha|, \alpha \in E\}$ y $hc(H)$ es el mínimo número t para el que cualquier t -coloración de H es heterocromática. Nótese que si H' es una subhipergráfica generadora de H , entonces $hc(H') \geq hc(H)$.

Una k – *gráfica* es una hipergráfica donde todas sus hiperaristas tienen exactamente k vértices. Nótese que para $k = 2$ estamos hablando de las gráficas usuales. Claramente, para una gráfica G , $hc(G) = c + 1$, donde c es el número de componentes conexas de G . Luego, G es conexa si y sólo si $hc(G) = 2$.

Diremos que una k -gráfica es *tensa* si y sólo si $hc(H) = k$. En una k -gráfica tensa, siempre hay una hiperarista heterocromática para cualquier k -coloración.

Una k -gráfica tensa $H = (V, E)$ es un k – *árbol* si para cualquier hiperarista $\alpha \in E$, la k -gráfica $H \setminus \alpha = (V, E \setminus \{\alpha\})$ no es tensa.

Como se puede observar, para 2-gráficas, la definición anterior caracteriza a los árboles, que siempre tienen el mismo número

de aristas si fijamos el número de vértices. Curiosamente, para $k \geq 3$, esto no ocurre, k -árboles definidos sobre el mismo conjunto de vértices pueden diferir en su tamaño (i.e. su número de hiperaristas), por ejemplo, los 3-árboles sobre 6 vértices con conjuntos de hiperaristas

$$\left\{ \begin{array}{l} \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 6\}, \\ \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 5, 6\} \end{array} \right\}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \\ \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\} \end{array} \right\}$$

Sea $H = (V, E)$ una k -gráfica y X un subconjunto no vacío de V . Definimos la traza de X como la $(k-1)$ -gráfica $Tr_G(X) = (V \setminus X, E_X)$ donde

$$E_X = \{ \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\} \subseteq V \setminus X \mid \exists x \in X, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, x\} \in E \}$$

y el *esqueleto* de H es la $(k-1)$ -gráfica $\aleph(H) = (V, S)$ donde

$$S = \{ \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\} \subseteq V \mid \exists x \in V, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, x\} \in E \}$$

Lema Básico 2.1 (Arocha, Bracho y Neumann-Lara)

$G = (V, E)$ es una k -gráfica tensa si y sólo si para todo subconjunto no vacío X de V , $Tr_G(X)$ es una $(k-1)$ -gráfica tensa.

Prueba (\implies) Supongamos que existe un conjunto no vacío X de V tal que $Tr_G(X)$ no es tensa, entonces existe $f : V \setminus X \rightarrow \{1, \dots, k-1\}$ que no es una coloración heterocromática de

$Tr_G(X)$. Si coloreamos los vértices de X con el color k obtenemos una k – *coloración* de G que no es heterocromática, luego G no es tensa.

(\Leftarrow) Supongamos que G no es tensa y que nuestro caso no es trivial, i.e. $|V| = n \geq k$, entonces existe una k – *coloración* $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ que no es heterocromática.

Sea $X = f^{-1}(k)$, entonces la restricción de f a $V \setminus X$ no puede ser una coloración heterocromática de $Tr_G(X)$, luego $Tr_G(X)$ no es tensa. \square

Sea $\rho : V \rightarrow V'$ una función sobreyectiva del conjunto de vértices V de la k -gráfica $H = (V, E)$ en el conjunto V' . La k -gráfica $H' = (V', E')$ con

$$E' = \{\{v'_1, \dots, v'_k\} \mid \exists \{v_1, \dots, v_k\} \in E, \rho(v_i) = v'_i, i = 1, \dots, k\}$$

es llamada el *cociente* de H por ρ , y es denotada por H/ρ .

Proposición 2.2 *Cocientes de k -gráficas tensas son tensos.*

Prueba Si f es una coloración de H/ρ , entonces $f \circ \rho$ es una coloración de H . Como H es tensa, existe una arista $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ separada por $f \circ \rho$, luego $\{\rho(v_1), \rho(v_2), \dots, \rho(v_k)\}$ es separada por f . \square

Graham y Lovász [5] definen un k – *bosque* como la k -gráfica tal que cualquiera de sus hiperaristas es separada por alguna coloración que no separa a ninguna otra hiperarista. Claramente una k -gráfica es un k -árbol si y sólo si es un k -bosque tenso. En [5], Lovász demostró que el tamaño máximo de un k -bosque con n vértices es $\binom{n-1}{k-1}$.

Haremos énfasis en el estudio del tamaño mínimo (Φ_n^k) de un k -árbol con n vértices. Es fácil observar que sólo para $k = 2$ k -árboles y k -árboles mínimos coinciden, son los árboles usuales (con $\Phi_n^2 = n - 1$).

Corolario 2.3 $\Phi_n^k \leq \Phi_{n+1}^k$.

Prueba Resulta inmediato de tomar un k -árbol minimal con $n + 1$ vértices, identificar dos vértices y aplicar Proposición 2.2. \square

Para $v \in V$ denotaremos por $\text{Val}(v)$ el número de aristas en $\text{Tr}(v)$.

Proposición 2.4 $\Phi_n^k \geq (n/k)\Phi_{n-1}^{k-1}$.

Prueba Sea $H = (V, E)$ un k -árbol minimal sobre el conjunto de vértices V , donde $|V| = n$. Por el Lema Básico 2.1, para cualquier $v \in V$, la traza $\text{Tr}(v)$ es tensa. Luego, $\text{Val}(v) \geq \Phi_{n-1}^{k-1}$ y

$$\begin{aligned} k|E| &= \sum_{v \in V} \text{Val}(v) \geq n\Phi_{n-1}^{k-1} \\ |E| &\geq (n/k)\Phi_{n-1}^{k-1} \\ \Phi_n^k &\geq (n/k)\Phi_{n-1}^{k-1} \end{aligned}$$

\square

Corolario 2.5 $\Phi_n^k \geq \left\lceil \frac{2}{n-k+2} \binom{n}{k} \right\rceil$.

Prueba Iterando la cota de la Proposición 2.4 se tiene que:

$$\begin{aligned}\Phi_n^k &\geq \binom{n}{k} \Phi_{n-1}^{k-1} \geq \binom{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \Phi_{n-2}^{k-2} \geq \dots \\ &\geq \binom{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \dots \binom{n-(k-3)}{k-(k-3)} \Phi_{n-(k-2)}^{k-(k-2)}\end{aligned}$$

Como $\Phi_n^2 = n - 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Phi_n^k &\geq \binom{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \dots \binom{n-k+3}{3} (n-k+1) \\ &= \binom{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \dots \binom{n-k+2}{2} \binom{n-k+1}{1} \frac{2}{n-k+2} \\ \Phi_n^k &\geq \left\lceil \binom{n}{k} \frac{2}{n-k+2} \right\rceil.\end{aligned}$$

□

A partir de ahora vamos a ocuparnos del caso particular $k = 3$ y por simplicidad denotaremos $\Phi_n = \Phi_n^3$.

Proposición 2.6 $\left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil \leq \Phi_n \leq \binom{n-1}{2}$.

Prueba Consecuencia directa de la Proposición anterior y la cota superior dada por Lovász para k -árboles con n vértices.

□

Conjetura 2.7 $\Phi_n = \left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil$.

Esta conjetura fue establecida por primera vez en [2], en dicho trabajo se muestra la primera familia infinita de 3-gráficas tensas que la satisfacen y que presentaremos posteriormente.

De acuerdo al Lema Básico 2.1, esta conjetura establece que para todo 3-árbol mínimo, la traza de todo vértice es un árbol (casos $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$) o una de las trazas contiene un ciclo y el resto son árboles (caso $n \equiv 1 \pmod{3}$).

Ejemplos de 3-árboles mínimos no isomorfos de orden 8: consideremos las 3-gráficas H_1 y H_2 , cuyo conjunto de vértices es \mathbb{Z}_8 con conjuntos de hiperaristas respectivamente:

$$E_1 = \left(\begin{array}{l} \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 7\}, \{0, 3, 7\}, \\ \{0, 4, 5\}, \{0, 5, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \\ \{1, 5, 6\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \\ \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 4, 7\}, \{4, 5, 7\} \end{array} \right)$$

y

$$E_2 = \left(\begin{array}{l} \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 5\}, \{0, 3, 5\}, \{0, 3, 6\}, \\ \{0, 3, 7\}, \{0, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 6\} \\ \{1, 4, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 6\}, \\ \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 7\} \end{array} \right)$$

Fueron construidos de manera tal que la función ($x \rightarrow x+1$) es un automorfismo. Las trazas de 0 son, respectivamente los árboles T_1 y T_2 de la Figura 1. Luego, son no isomorfos, y por su simetría no es difícil comprobar que H_1 y H_2 son tensas.

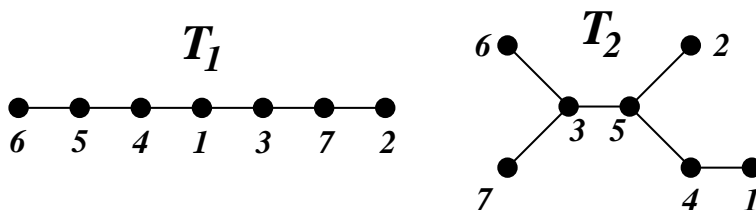


Figura 1. La traza de 0 en H_1 y H_2

2.1.1 Una familia infinita de 3-árboles mínimos

Denotemos por p un número primo y $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ el campo con p elementos. Sea $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ el grupo multiplicativo de \mathbb{Z}_p .

Proposición 2.8 *Para cualquier 3-coloración de \mathbb{Z}_p^* , existe una solución de la ecuación $x + y = z$ con colores distintos.*

Prueba Supongamos que la Proposición es falsa. Entonces existe una partición $\pi = \{A, B, C\}$ de \mathbb{Z}_p^* en bloques no vacíos tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A + B) \cap C = \emptyset \\ (C + B) \cap A = \emptyset \\ (A + C) \cap B = \emptyset \end{array} \right\} \quad (*)$$

Nótese que si la partición $\pi = \{A, B, C\}$ satisface $(*)$ entonces para todo x en \mathbb{Z}_p^* , $x\pi = \{xA, xB, xC\}$ es también una partición que satisface $(*)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $|A| \leq |B|$ y $|A| \leq |C|$. Si $1 \notin A$, por la observación anterior, para cualquier $a \in A$, la nueva partición $a^{-1}\pi = \{a^{-1}A, a^{-1}B, a^{-1}C\}$ tiene a 1 en el bloque menor. Luego, podemos asumir que 1 está en A . Sea t el mayor número tal que $\{1, \dots, t\} \subseteq A$. Se tiene que $t \geq 1$ y podemos suponer que $t+1$ pertenece a B .

Afirmación: Si $c \in C$ entonces $\{c-1, c-2, \dots, c-t\} \subseteq A$.

Para ver esto, sea $C = \{c_1 < c_2 < \dots\}$ y $h \in \{1, \dots, t\}$. Si $c_i - h \in B$, entonces $c_i = (c_i - h) + h$, que contradice $(*)$. Esto prueba la Afirmación para c_1 ya que $c_1 > t$ y por definición, es el menor elemento en C . Supongamos que la Afirmación es

verdadera hasta cierto c_{i-1} . Si $c_i - h \in C$, entonces $c_i = c_j + h$, para algún $j < i$. Como $x = t + 1 - h \in \{1, \dots, t\}$, tenemos por hipótesis de inducción que $c_j - x = c_i - h - (t + 1 - h) = c_i - (t + 1) \in A$. Pero $t + 1 \in B$, luego $(c_i - (t + 1)) + (t + 1) = c_i$, que contradice (*). De aquí que $c_i - h \in A$, con lo que queda demostrada la Afirmación.

Por la Afirmación, la función $f : C \rightarrow A$ tal que $f(c) = c - 1$, $\forall c \in C$ es una inyección de C en A pero no es biyección, ya que $1 \in A$ pero $2 \notin C$, lo cual contradice el hecho de que A es el bloque más pequeño de la partición. \square

Nótese que la Proposición 2.8 no puede ser generalizada directamente para 4-coloraciones. Por ejemplo, si consideramos la 4-coloración $\{\{1\}, \{-1\}, A, B\}$ donde $B = \mathbb{Z}_p^* \setminus (A \cup \{1, -1\})$ y

$$A = \begin{cases} \{2, 5, 6, 9, 10, \dots, p - 4, p - 3\}, & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \\ \{2, 3, 6, 7, \dots, p - 5, p - 4\}, & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

entonces se tiene que $A = -B$, luego $x + y = 2$ no tiene solución, con $x \in A$ y $y \in B$. De aquí que la ecuación $x + y + z = w$ no tiene solución con colores distintos. Nótese que la Proposición 2.8 es en cierto sentido, la versión anti-Ramsey del Teorema de Schur (ver [4]).

Denotemos por $\mathcal{B}_p = (\mathbb{Z}_p^*, E)$ la 3-gráfica cuyas hiperaristas son las ternas $\{x, y, z\}$ tales que $x + y = z$. Por la Proposición 2.8, \mathcal{B}_p es tensa. Sea G un subgrupo de \mathbb{Z}_p^* y sea $nat: \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^*/G$ la función canónica que asocia a cada elemento de \mathbb{Z}_p^* su clase en el cociente \mathbb{Z}_p^*/G . Denotemos por \mathcal{B}_p/G el cociente de \mathcal{B}_p por nat . Por la Proposición 2.2, \mathcal{B}_p/G es tensa. No es difícil comprobar que el grupo de automorfismos de \mathcal{B}_p/G es transitivo en vértices.

Sea $\mathcal{L}_p = (V_p, E_p) = \mathcal{B}_p / \{1, -1\}$. Entonces $V_p = \left\{1, \dots, \frac{(p-1)}{2}\right\}$.

Lema 2.9 *Para todo vértice x de \mathcal{L}_p , $Tr(x)$ es una cadena.*

Prueba Analicemos la traza de 1 en \mathcal{B}_p . En la ecuación $x + y = z$, los casos $x = 1$ y $y = 1$ son simétricos.

Si $x = 1$, entonces $\{y, z\}$ son aristas en $Tr(1)$ de la forma: $\{i, i + 1\}$, $i = 2, \dots, p - 1$ (inducen una cadena de orden $p - 2$).

Si $z = 1$, entonces $\{x, y\}$ son aristas en $Tr(1)$ de la forma: $\{i, -i + 1\}$, $i = 2, \dots, (p - 1)/2$.

En la Figura 2 se muestra la forma de $Tr(1)$.

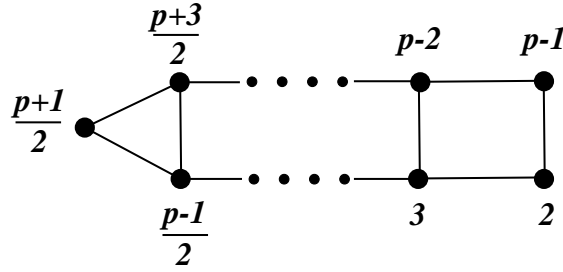


Figura 2. La traza de 1 en \mathcal{B}_p .

Como los vértices de \mathcal{L}_p son los pares: $[x] = \{x, -x\}$, $x = 1, \dots, (p - 1)/2$, $Tr([1])$ es la cadena:

$$Tr([1]) : [2] [3] \dots [(p - 3)/2] [(p - 1)/2]$$

Nótese que para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}_p^*$, $\exists \alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ tal que $v_1 = \alpha v_2$, entonces la función $p_{v_1, v_2} : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$ definida como $p_{v_1, v_2}(v) = \alpha v$, $\forall v \in \mathbb{Z}_p^*$ es un automorfismo de \mathcal{B}_p ya que si $\{x, y, z\}$ es tal que $x + y = z$, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y = \alpha z$, i.e. $\{\alpha x, \alpha y, \alpha z\}$ es

una terna en \mathcal{B}_p . Además $p_{v_1, v_2}(v_1) = v_2$, independientemente de cómo se hayan escogido v_1 y v_2 , luego el grupo de automorfismos de \mathcal{B}_p es transitivo en vértices, de aquí que $Tr(1)$ es isomorfa a $Tr(v)$, $\forall v \in \mathbb{Z}_p^*$. Luego, en \mathcal{L}_p todas las trazas son isomorfas (propiedad heredada de manera natural de \mathcal{B}_p) y son cadenas, ya que $Tr([1])$ es cadena en \mathcal{L}_p . \square

Teorema 2.10 \mathcal{L}_p es un 3-árbol mínimo.

Prueba Sea $n = (p-1)/2$, y denotemos por w el número de ternas en \mathcal{L}_p . Por el Lema 2.9, $Val(v) = n-2$ para todo vértice de \mathcal{L}_p . Luego

$$3w = \sum_{v \in V_p} Val(v) = n(n-2)$$

$$w = \frac{n(n-2)}{3}$$

Por la Proposición 2.6, $\Phi_n \geq \left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil$, y del hecho de que \mathcal{L}_p es tensa se sigue directamente el resultado deseado. \square

Corolario 2.11 Si $2n+1$ es un número primo, entonces $\Phi_n = \frac{n(n-2)}{3}$.

2.2 Triangulaciones de superficies cerradas

En la sección anterior analizamos cómo construir una familia infinita de 3-árboles mínimos (la familia \mathcal{L}_p), pero aún estamos lejos de saber si la Conjetura 2.7 es cierta o no.

Nuestro trabajo está dirigido a demostrar la validez de esta conjetura, i.e. $\Phi_n = \left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil$ para $n \equiv 3, 4 \pmod{6}$. Lo primero que se nos ocurre es ver si existen 3-gráficas conocidas con el número de ternas deseado (aún cuando no sepamos cómo se comportan con respecto a la tensión).

Hay una familia especial de 3-gráficas que cumplen con este requisito, aquellas donde la traza de todo vértice es un árbol. Si la 3-gráfica es de orden n , por cada vértice se cuentan $n - 2$ ternas (una por cada arista de la traza, que es un árbol) y como cada terna la estamos contando tres veces (dada una terna, una vez por cada vértice de la misma) obtenemos el número de ternas deseado: $\frac{n(n-2)}{3}$. En particular, si todas las trazas son cadenas, llamaremos a la 3-gráfica, *3-cadena*. Como se puede observar, las \mathcal{L}_p son 3-cadenas.

Sucede que las 3-cadenas tienen una interpretación topológica clara. Si ponemos “tela” en sus ternas (vistas como discos u homeomorfos a estos), cualquier punto tiene una vecindad homeomorfa a un disco o a un semidisco. Es decir, la 3-gráfica representa una triangulación de una superficie con frontera donde la frontera está determinada por aquellas aristas que aparecen solamente en una terna. Más aún, la 3-gráfica representa una inmersión de una gráfica completa en una superficie con frontera, donde inmersión se refiere a que la gráfica está bien encajada o dibujada sobre la superficie, es decir, sus aristas no se intersecan.

Esta interpretación de las 3-cadenas nos conduce inmediatamente a revisar los trabajos de Ringel, White y otros (ver [7]) sobre el número cromático ($\chi(S)$) de una superficie cerrada S ,

definido como: $\chi(S) = \underset{G \subset S}{\text{máx}} \chi(G)$, donde el máximo se toma sobre el número cromático de todas las posibles gráficas que pueden ser dibujadas sobre la superficie S . La solución de este problema consiste esencialmente en encontrar el máximo n tal que la gráfica completa K_n puede ser dibujada en la superficie S (S distinta de la esfera). Es interesante observar que para el caso en que la superficie cerrada es una esfera, estamos en presencia del Problema de los Cuatro Colores, que establece originalmente que son suficientes 4 colores para colorear los “países” de cualquier mapa sobre la esfera de manera que países con frontera común (distinta de un punto) están coloreados de diferente color. En la terminología adoptada anteriormente, el problema consiste en probar que el número cromático de la esfera es 4.

Diremos que una 3-gráfica es un 3 – ciclo si la traza de todo vértice es un ciclo. No es difícil comprobar que el conjunto de ternas determinado por los triángulos de una inmersión de una gráfica completa en una superficie cerrada es un 3-ciclo. Si en un 3-ciclo extraemos un vértice y todas las ternas que lo contienen, obtenemos una 3-cadena, o sea, 3-gráficas candidatas a ser tensas mínimas. Es por esto que los métodos para construir inmersiones de gráficas completas en superficies cerradas ocuparon nuestro interés y vamos a exponer algunos de estos métodos. Para mayor información ver [7] que trata el tema con gran detalle.

Antes de mostrar una de las técnicas más utilizadas en [7] (Método de las gráficas de voltaje) para construir 3-ciclos, conviene introducir algunos conceptos.

Sea $C = \{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$ un conjunto de ciclos de orden $n - 1$ tales que en C_j no se repiten elementos y $j \notin C_j, \forall j \in \mathbb{Z}_n$.

No es difícil comprobar que para que esta familia represente la inmersión de K_n en cierta superficie cerrada, de manera que la traza de j sea C_j , $\forall j \in \mathbb{Z}_n$, es que se satisfaga la Regla de los triángulos o brevemente Regla Δ .

Regla Δ : Si en la traza del vértice i se tiene la arista $\{j, k\}$ entonces en la traza del vértice k se tiene la arista $\{i, j\}$ y en la traza de j , la arista $\{i, k\}$.

Rotación de una gráfica: Consiste en tomar cada uno de los vértices de una gráfica y darle un orden cíclico a las aristas incidentes a cada uno de ellos.

Vamos a considerar solamente las dos formas naturales de ordenar a las aristas que inciden a un vértice: en el sentido de las manecillas del reloj y en la dirección contraria. Para representar la primera forma de ordenación, el vértice será un círculo sombreado (\bullet) y para representar el orden contrario, el vértice será un círculo sin sombreadar (\circ).

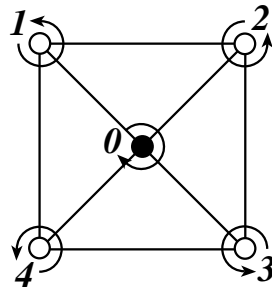


Figura 3. Rotación de una gráfica

Por ejemplo, en la gráfica de la Figura 3 se tiene la siguiente rotación:

0.	1	2	3	4
1.	4	0	2	
2.	0	3	1	
3.	2	0	4	
4.	3	0	1	

Consideremos caminos cerrados (circuitos) en la gráfica, determinados por una rotación de ella. Cuando recorremos un arco en el mismo sentido de su orientación tomamos al elemento de \mathbb{Z}_n como aparece, en caso contrario tomamos a su inverso aditivo. En la Figura 3 tenemos el camino cerrado 120340. Nótese que la condición para terminar de recorrer un circuito es alcanzar el vértice inicial y que dicho circuito puede contener caminos cerrados (en este caso 034).

Nuestro objetivo es construir un 3-ciclo de orden n , donde \mathbb{Z}_n actúe sobre las trazas, es decir, es suficiente conocer cómo es la traza de un vértice para poder reconstruir la traza de cualquier otro vértice. Si conocemos la traza del vértice i , construimos la traza del vértice j sumando a cada uno de los elementos de la traza de i , $(j - i)(\text{mod } n)$. Por ejemplo, si para $n = 5$ tenemos que la traza del vértice 2 es 1403 entonces la traza del 4 será 3120 (resultado de sumar $4 - 2 = 2$ a cada vértice de la traza de 2, módulo 5).

Gráfica de voltaje de \mathbb{Z}_n : Es una gráfica dirigida y con cierta rotación, donde a cada arista se le asocia un elemento de \mathbb{Z}_n (distinto de cero) que se denominará corriente de la arista.

Arco final: Arista incidente a un vértice de valencia 1.

Utilizaremos gráficas de voltaje que deben cumplir las siguientes propiedades:

P1. La gráfica de voltaje tiene vértices de valencia 3, 2 ó 1.

P2. Si un vértice P es de valencia 2, entonces uno de los arcos incidentes a P es un arco final. La corriente del otro arco fluye hacia P y debe duplicar la corriente del arco final. (Ver Figura 4)

P3. La rotación de la gráfica induce un solo circuito.

P4. Cada elemento desde 1 a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ de \mathbb{Z}_n aparece exactamente una vez como la corriente de alguna arista de la gráfica.

P5. En cada vértice de valencia tres, la suma de los voltajes que entran es igual a la suma de los voltajes que salen. (Esta propiedad justifica el nombre de las gráficas que vamos a utilizar, por su similitud con las Leyes de Flujo de Kirchoff)

P6. Cada elemento de orden dos en el grupo, es corriente de un arco final donde uno de sus extremos es un vértice de grado tres.

P7. Se admite la presencia de aristas especiales llamadas “arcos de ruptura” que cumplen las siguientes condiciones:

i) Un arco de ruptura está dividido por su punto medio en dos semiarcos (este punto medio no se considera un vértice de la gráfica).

ii) Los arcos de ruptura tienen cierta corriente, al igual que las demás aristas.

iii) Ambos semiarcos están orientados hacia su punto medio o en dirección opuesta.

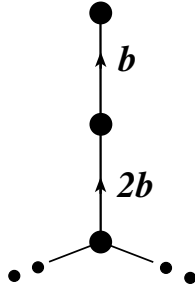


Figura 4. Un vértice de valencia dos

Para construir un circuito en una gráfica de voltaje hay que tener cuidado al recorrer arcos especiales. Al llegar a un arco final, si su corriente es de orden dos, no se repitará el elemento, lo consideraremos solamente una vez. Al pasar por el punto medio de un arco de ruptura hay que “multiplicar nuestra conducta por -1 ”, es decir, si se alcanza un vértice de tipo \bullet actuamos como si fuera de tipo \circ , si el arco tiene corriente a y lo estamos recorriendo en la misma dirección en que está orientado, escribimos $-a$ en vez de a . Al pasar por el punto medio de un arco de ruptura por segunda vez, nos comportamos normalmente.

¿Cómo construiremos un 3-ciclo que cumpla la Regla Δ a partir de una gráfica de voltaje que satisfaga estas propiedades?

La traza del 0 estará determinada por el circuito inducido por la rotación de la gráfica. Por P3 el circuito no contiene circuitos más pequeños, luego la traza del 0 es un ciclo que contiene a todas las aristas de la gráfica, dos veces, una por cada dirección. Por P4 el ciclo contiene a todos los elementos de $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$. Por ejemplo, en la Figura 5 se tiene una gráfica de voltaje de \mathbb{Z}_7 que cumple P1, P3 y P4. La traza del 0 es: $1 \ 3 \ 2 \ -1 \ -3 \ -2$ donde $-i$ denota el inverso aditivo de i en $\mathbb{Z}_7, \forall i \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$. Dada la traza del 0, obtenemos la traza de i adicionando i (módulo 7)

a cada elemento de la traza de 0, sin cambiar el orden en que están dispuestos en dicha traza.

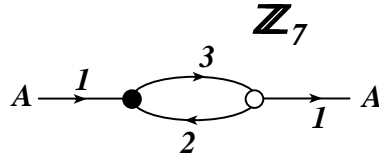


Figura 5. Una gráfica de voltaje de \mathbb{Z}_7

Veamos que se cumple la Regla Δ . Supongamos que en la traza de i tenemos la arista $\{j, k\}$, entonces en la traza de 0 tenemos las aristas $\{j - i, k - i\}$ y $\{-(k - i), h\}$, supongamos que dichas aristas están asociadas a un vértice de valencia tres. Adicionando k , (módulo n) tenemos en la traza de k la arista $\{i, h + k\}$, por P5 $h = (j - i) + (i - k)$, luego $j = k + h$. De aquí que en la traza de k aparece la arista $\{i, j\}$. Nótese que por P6, se obtiene el mismo resultado, independientemente de que el elemento $k - i$ sea o no de orden dos.

Adicionando $j = k + h \pmod{n}$ a la arista $\{-h, i - j\}$ en la traza de 0, se tiene la arista $\{k, i\}$ en la traza de j . De aquí que la Regla Δ se satisface cuando recorremos la gráfica de voltaje por vértices de grado tres y uno (estos últimos asociados a elementos de orden dos en \mathbb{Z}_n).

Para un vértice de valencia dos (ver Figura 4), en el siguiente esquema se observan las ternas involucradas en la construcción.

$$\begin{array}{cccccc}
 Tr(0) & \dots & 2b & b & -b & -2b & \dots \\
 Tr(b) & \dots & . & 2b & 0 & -b & \dots \\
 Tr(-b) & \dots & b & 0 & -2b & . & \dots \\
 Tr(2b) & \dots & . & . & b & 0 & \dots \\
 Tr(-2b) & \dots & 0 & -b & . & . & \dots
 \end{array}$$

Se puede comprobar fácilmente que esta parte de la 3-gráfica satisface la Regla Δ .

Hemos visto de manera general cómo se construyen 3-ciclos utilizando gráficas de voltaje. Veamos una solución ingeniosa del caso donde $n \equiv 4(\text{mod } 12)$, utilizando el método antes expuesto.

2.2.1 Caso $n \equiv 4(\text{mod } 12)$

Considere la siguiente gráfica de voltaje de \mathbb{Z}_{16} . Nótese que hay 3 arcos de ruptura.

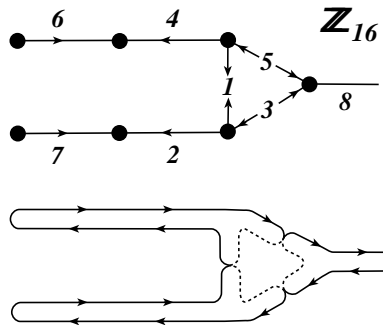


Figura 6.

La traza del 0 queda determinada por el único circuito de la gráfica como sigue:

$$4 \ 10 \ 6 \ 12 \ 11 \ 3 \ 2 \ 9 \ 7 \ 14 \ 1 \ 5 \ 8 \ 13 \ 15 .$$

Para generalizar este ejemplo para $n = 12s + 4$, $s \geq 1$, consideremos la gráfica de voltaje de la Figura 8, la Figura 7 muestra el ejemplo $s = 2$. El semiarco de la derecha con la corriente $2s + 1$ y el semiarco de la izquierda con la misma corriente forman parte de un mismo arco de ruptura. Claramente se cumple P1, no es

difícil comprobar que cada uno de los elementos $1, 2, \dots, 6s + 2$ es usado exactamente una vez, el último de ellos en un arco final (satisfaciéndose P4 y P6). P5 se satisface en cada vértice de grado tres. En todos los vértices de grado dos se cumple P2. También se puede comprobar la validez de P3, y de P7 en cada uno de los arcos de ruptura. Luego la 3-gráfica que se obtiene a partir de esta gráfica de voltaje es un 3-ciclo.

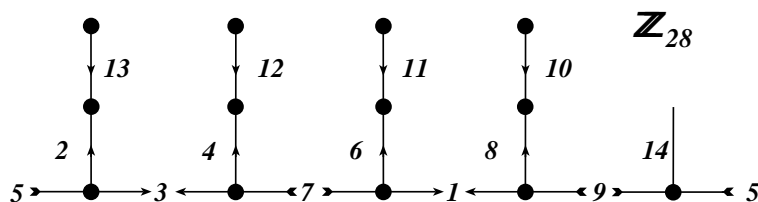


Figura 7.

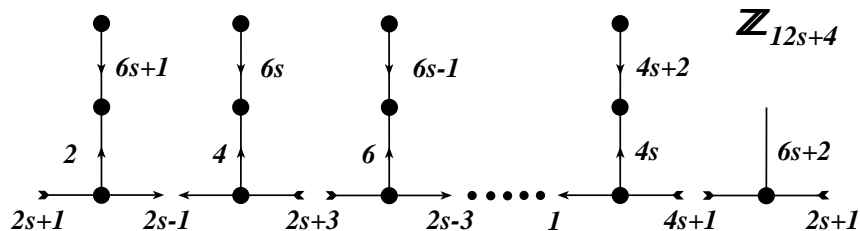


Figura 8.

Demostremos que la superficie cerrada donde está encajada la gráfica completa es no orientable. Para ello consideremos la siguiente parte de las trazas de la 3-gráfica:

$Tr(0)$	$4s$	$8s + 2$	$4s + 2$	$8s + 4$	\dots	2	$6s + 3$	$6s + 1$	$12s + 2$
$Tr(2)$	$4s + 2$	$8s + 4$	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot	$6s + 3$	0
$Tr(4s + 2)$	\cdot	0	$8s + 4$	2	\dots	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot

Si le damos la orientación $(0, 2, 6s + 3)$ a la terna $\{0, 2, 6s + 3\}$, las orientaciones de $\{0, 4s + 2, 8s + 4\}$ y $\{2, 4s + 2, 8s + 4\}$ quedan determinadas como $(0, 4s + 2, 8s + 4)$ y $(2, 4s + 2, 8s + 4)$ respectivamente. De aquí que, independientemente de cómo orientemos la traza de $4s + 2$, alguna de las orientaciones de estas dos últimas ternas no va a estar bien determinada. Luego la superficie cerrada obtenida es no orientable.

2.2.2 Caso $n \equiv 10 \pmod{12}$

Para resolver este caso nos apoyaremos en algunos resultados que no demostraremos. Para más detalles véase [7].

Proposición 2.12 *K_6 puede ser dibujado en una superficie cerrada no orientable.*

Proposición 2.13 *Si existe una inmersión de K_{2t+2} en una superficie cerrada no orientable, entonces existe una inmersión de K_{4t+2} en una superficie cerrada no orientable.*

Proposición 2.14 *Para todo entero no negativo t existe una inmersión de K_{12t} en una superficie cerrada no orientable.*

Proposición 2.15 *Existe una inmersión de K_{12s+10} en una superficie cerrada no orientable, para todo entero $s \geq 1$.*

Prueba (Inducción sobre s)

Por la Proposición 2.12, K_6 puede ser dibujado sobre una superficie cerrada no orientable y por la Proposición 2.13, para $t = 2$, existe una inmersión de K_{10} en una superficie cerrada no orientable. Luego la Proposición 2.15 es cierta para $s = 0$.

Dado $s > 0$, supongamos que existen inmersiones de K_{12s+6} y K_{12s+10} en superficies cerradas no orientables para todo entero positivo menor que s .

Por la Proposición 2.14 cuando s es impar y por hipótesis de inducción cuando s es par, existe una inmersión de K_{6s+6} en una superficie cerrada no orientable. Aplicando la Proposición 2.13 para $t = 3s + 2$ obtenemos la inmersión deseada de K_{12s+10} en una superficie cerrada no orientable. \square

Los casos analizados ($n \equiv 4, 10 \pmod{12}$) no fueron tomados al azar. A partir de ellos, podemos construir 3-cadenas sobre superficies no orientables con frontera conexa, para $n \equiv 3 \pmod{6}$, mediante el método antes mencionado de extraer un vértice y todas las ternas que lo poseen. Desafortunadamente, no sabemos cómo se comportan estas 3-gráficas con respecto a la tensión. En el Capítulo 3 vamos a mostrar un método para construir 3-cadenas tensas sobre superficies no orientables para $n \equiv 3 \pmod{6}$.

2.3 Superficies trianguladas tensas y no tensas

En esta sección trataremos de manera exitosa el problema de cómo construir inmersiones de gráficas completas en superficies, conociendo el comportamiento de las 3-gráficas correspondientes con respecto a la tensión. Vamos a ver algunos de los resultados desarrollados en [2] y [3].

2.3.1 Método de acoplamiento

Sea $H = (V, E)$ una 3-cadena. La frontera de H (denotada por ∂H) es la gráfica $\partial H = (V, E')$ donde $\{u, v\} \in E'$ si y sólo si v es un vértice de grado 1 en la cadena $Tr_H(u)$ o equivalentemente, si la pareja $\{u, v\}$ aparece exactamente en una terna de H . Por definición ∂H es regular de grado dos, es decir una unión disjunta de ciclos.

Sean $H_0 = (V_0, E_0)$ y $H_1 = (V_1, E_1)$ dos 3-cadenas y $\theta : \partial H_1 \rightarrow \partial H_0$ un isomorfismo de gráficas (esto implica que H_0 y H_1 tienen el mismo orden). Supongamos que le damos cierta orientación a cada uno de los ciclos de ∂H_1 , a la digráfica correspondiente la denotaremos por $\overrightarrow{\partial H_1} = (V_0, \overrightarrow{E_1})$.

Definición: El acoplamiento de H_0 y H_1 a través de θ es la 3-gráfica $\tilde{H} = H_0 \diamond_{\theta} H_1 = (\tilde{V}, \tilde{E})$ cuyo conjunto de vértices es $\tilde{V} = V_0 \sqcup V_1$ (la unión disjunta de V_0 y V_1) y las ternas definidas por:

- (c1) $\{u, v, w\} \in E_0 \Rightarrow \{u, v, w\} \in \tilde{E}$
- (c2) $\{x, y, z\} \in E_1 \Rightarrow \{\theta(x), y, z\}, \{x, \theta(y), z\}, \{x, y, \theta(z)\} \in \tilde{E}$
- (c3) $(x, y) \in \overrightarrow{E_1} \Rightarrow \{\theta(x), \theta(y), y\}, \{x, y, \theta(y)\} \in \tilde{E}$

Para una 3-cadena H , el acoplamiento de H es $H \diamond H = H \diamond_{id} H$, donde id es la función identidad en ∂H con determinada orientación.

Por ejemplo, el acoplamiento de un triángulo determina el 3-ciclo correspondiente a una inmersión de K_6 en el plano proyectivo.

En lo adelante, usaremos las letras u, v y w para denotar vértices en H_0 y las letras x, y y z para denotar vértices en H_1 .

También abreviaremos Tr_{H_i} ($i = 0, 1$) y $Tr_{\tilde{H}}$ por Tr_i y \widetilde{Tr} , respectivamente.

Lema 2.16 $\tilde{H} = H_0 \diamond_{\theta} H_1$ es un 3-ciclo.

Prueba Debemos probar que la traza de todo v3rtice en \widetilde{Tr} es un ciclo.

Caso1. $u \in V_0$. De (c1) se tiene una inclusi3n can3nica $H_0 \hookrightarrow \tilde{H}$ que induce una inclusi3n de la subcadena $Tr_0(u)$ en $\widetilde{Tr}(u)$.

Sea $x = \theta^{-1}(u)$. Por (c2) tenemos la inclusi3n de la subcadena $Tr_1(x)$ en $\widetilde{Tr}(u)$. Luego $\widetilde{Tr}(u)$ contiene dos subcadenas disjuntas, cuya uni3n contiene a todos los v3rtices, excepto x , que por el momento no sabemos c3mo est3 relacionado con el resto de los v3rtices.

La orientaci3n de $\overrightarrow{\partial H_1}$ nos induce un orden natural en cada ciclo de ∂H_1 y en ∂H_2 , a trav3s de θ . Dado un v3rtice x , x^- denotar3 el elemento que le antecede y x^+ el que le precede, en $\overrightarrow{\partial H_1}$. As3 que (x^-, x) y (x, x^+) son las 3nicas aristas en $\overrightarrow{E_1}$ que contienen a x . N3tese que x^- y x^+ ($u^- = \theta(x^-)$ y $u^+ = \theta(x^+)$) son los v3rtices de grado 1 en $Tr_1(x)$ ($Tr_0(u)$).

Luego, las tres posibles ocurrencias de u en la parte derecha de (c3): $\{u^-, u, x\}$, $\{x^-, x, u\}$ y $\{u, u^+, x^+\}$ nos dan las aristas que completan el ciclo $\widetilde{Tr}(u)$ (ver Figura 9).

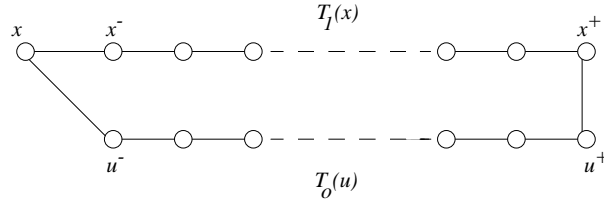


Figura 9.

Caso 2. $x \in V_1$. Claramente, en $\widetilde{Tr}(x)$ no aparecen aristas de (c1). Por (c2) para toda arista $\{y, z\} \in Tr_1(x)$ aparecen las aristas $\{\theta(y), z\}$ y $\{y, \theta(z)\}$ en $\widetilde{Tr}(x)$, que inducen dos cadenas disjuntas que no contienen a x y u (ver Figura 10).

Por (c3) se obtienen tres ternas que determinan que $\widetilde{Tr}(x)$ sea un ciclo: $\{x^-, x, u\}$, $\{u, u^-, x\}$ y $\{u, u^+, x\}$ (ver Figura 10). \square

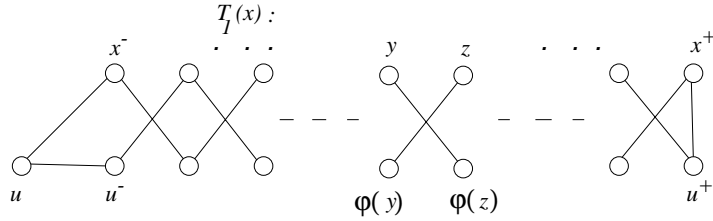


Figura 10.

Definamos una familia infinita de superficies trianguladas aplicando iterativamente el método de acoplamiento sobre las 3-cadenas obtenidas en la subsección 2.1.1 (\mathcal{L}_p).

Familia de superficies primas iteradas. Sea p un número primo y $\mathcal{C}_{p,0} = \mathcal{L}_{p,-1} \diamond \mathcal{L}_{p,-1}$, donde $\mathcal{L}_{p,-1} = \mathcal{L}_p$. Por el Lema 2.16, $\mathcal{C}_{p,0}$ es un 3-ciclo de orden $p - 1$

Para iterar sobre k , tomemos la 3-cadena:

$$\mathcal{L}_{p,k} = \mathcal{C}_{p,k} - x$$

donde x es un vértice de $\mathcal{C}_{p,k}$ (la resta indica extraer el vértice y todas las ternas que lo contienen) y luego construimos el 3-ciclo:

$$\mathcal{C}_{p,k+1} = \mathcal{L}_{p,k} \diamond \mathcal{L}_{p,k}$$

En principio, el vértice que se vaya a extraer y la orientación que se le asigne a la frontera, para realizar el acoplamiento, afecta la clase de isomorfismo de la superficie prima iterada. Es decir, si se seleccionan vértices a extraer distintos y/o orientaciones de la frontera diferentes, se podrían obtener hipergráficas no isomorfas.

Definición: Diremos que un número primo p es conexo si, en \mathbb{Z}_p^* , $\{2^k\}_{k \geq 0}$ es transversal a la partición $\{[x]\}_{x=1}^{(p-1)/2}$ o equivalentemente, si el subgrupo generado por 2 en \mathbb{Z}_p^* actúa transitivamente sobre \mathcal{L}_p .

Nótese que la familia de 3-ciclos $\{\mathcal{C}_{p,k}\}$ puede ser extendida para $k = -1$ cuando p es conexo. De hecho, para cualquier p , las componentes de $\partial\mathcal{L}_p$ se corresponden con las órbitas del subgrupo $\langle 2 \rangle \subset \mathbb{Z}_p^*$ que actúa sobre $\mathcal{L}_p^{(0)}$. De aquí que cuando la frontera de \mathcal{L}_p es conexa (i.e. cuando p es conexo) podemos agregar un nuevo vértice, el conjunto de ternas determinado por dicho vértice y las aristas originales de la frontera, con lo que se obtiene el 3-ciclo $\mathcal{C}_{p,-1}$ para iniciar el proceso de iteración. Posteriormente veremos como en el caso de que $\partial\mathcal{L}_p$ no sea conexa existe una familia infinita de 3-ciclos no tensos.

Lema 2.17 *Si $\partial H_0 \cong_{\theta} \partial H_1$ no es conexa, entonces $\widetilde{H} = H_0 \diamond_{\theta} H_1$ no es tensa.*

Prueba Nótese que $\widetilde{Tr}(V_1) = \partial H_0$, para ver esto observe que las únicas ternas que tienen exactamente un vértice de V_1

se obtienen a partir del primer grupo de ternas de (c3). Por el Lema Básico 2.1, \widetilde{H} es no tensa si alguna de sus trazas no es conexa. Como θ es un isomorfismo de gráficas de ∂H_1 en ∂H_0 , $\widetilde{Tr}(V_1) = \partial H_0$ no es conexa, luego \widetilde{H} no es tensa. \square

Teorema 2.18 *Sean H_0 y H_1 3-cadenas tensas con frontera conexa. Entonces, para todo isomorfismo $\theta : \partial H_1 \rightarrow \partial H_0$ y cualquier orientación de ∂H_1 , $\widetilde{H} = H_0 \diamond_{\theta} H_1$ es tensa.*

Prueba Consideremos una 3-coloración arbitraria de \widetilde{H} con los colores rojo, verde y azul. Si los tres colores aparecen en V_0 , como H_0 es tensa, existe una terna heterocromática. Como $H_0 \hookrightarrow \widetilde{H}$, \widetilde{H} es tensa.

Supongamos que uno de los colores, el azul por ejemplo, no aparece en V_0 . Si $\widetilde{Tr}(X)$ es conexa, donde X es el subconjunto de vértices de V_1 coloreados de azul, claramente existe una terna heterocromática en \widetilde{H} . Luego, demostraremos que $\widetilde{Tr}(X)$ es conexa, $\forall X \subseteq V_1$ mostrando una subgráfica generadora conexa de $\widetilde{Tr}(X)$. Como $\widetilde{Tr}(V_1) = \partial H_0$ es conexa por hipótesis, vamos a suponer que $X \neq V_1$.

Sea $U = \theta(X)$ y consideremos la subgráfica de $\widetilde{Tr}(X)$ inducida por U a la que denotaremos por $G_0 = \langle U : \widetilde{Tr}(X) \rangle$. Como las únicas aristas de esta gráfica provienen de la primera parte de (c3), se tiene que $G_0 = \langle U : \partial H_0 \rangle$. Es decir, es una subgráfica propia de un ciclo dirigido $(\overrightarrow{\partial H_0})$ o equivalentemente, G_0 es la unión de cadenas dirigidas (algunas de ellas podrían tener longitud 0, i.e., constar de un solo vértice).

Por otra parte, consideremos la gráfica G_1 con conjunto de vértices $\widetilde{V} - X - U$, con dos aristas $\{\theta(y), z\}$ y $\{y, \theta(z)\}$, para

toda arista $\{y, z\} \in Tr_1(X)$. Por la segunda y tercera parte de (c2), claramente G_1 es una subgráfica de $\widetilde{Tr}(X)$.

Como H_1 es tensa, por el Lema Básico 2.1, $Tr_1(X)$ es conexa. Luego, por construcción G_1 es conexa, excepto cuando $Tr_1(X)$ sea una gráfica bipartita, en cuyo caso G_1 tiene dos componentes conexas. Nótese que en ese caso, x y $\theta(x)$ están en componentes distintas, para todo vértice x en G_1 .

Finalmente, sea G la unión de G_0 y G_1 a la que le agregamos las aristas que aparecen en $\widetilde{Tr}(X)$ por (c3). G es una subgráfica generadora de $\widetilde{Tr}(X)$, debemos probar que es conexa.

Sea $u = \theta(x)$ un vértice en G_0 que es el vértice inicial de una de sus componentes. Usando la notación del Lema 2.16, sea u^- el vértice que le precede a u en $\overrightarrow{\partial H_0}$, nótese que por la forma en que se ha seleccionado u , $u^- \in G_1$, luego $x^- = \theta(u^-) \in G_1$. Por (c3) tenemos las siguientes aristas en G : $\{u^-, u\}$ $\{x^-, u\}$ (ver Figura 11).

De aquí que las dos posibles componentes de G_1 se conectan a través de u y la componente tomada en G_0 (una cadena, por construcción) está conectada a G_1 por su vértice inicial. Como esto se cumple para cualquier componente de G_0 , hemos demostrado que G es conexa. Luego, $\widetilde{Tr}(X)$ es conexa y el Teorema queda demostrado. \square

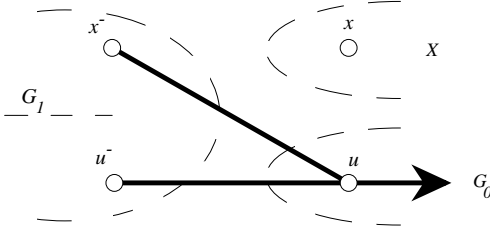


Figura 11.

Corolario 2.19 *Sea H una 3-cadena. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) H y ∂H son tensas.
- (b) $H \diamond H$ es tensa.

Prueba (a \implies b) Teorema 2.18.

(b \implies a) Por el Lema 2.17, ∂H es tensa (o conexa) y H es tensa ya que claramente, existe una función cociente $H \diamond H \rightarrow H$ (ver Proposición 2.2). \square

Teorema 2.20 *Existen 3-ciclos tensos de orden $(p+1)/2$ y $p-1$, para todo primo conexo p .*

Prueba Como $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_{p,-1}$ es tensa, al igual que su frontera, para primos conexos, se tiene que $\mathcal{C}_{p,0}$ (de orden $p-1$) es tensa por el Corolario 2.19. Por otra parte, $\mathcal{C}_{p,-1}$ (de orden $(p-1)/2 + 1 = (p+1)/2$) es tenso porque se obtiene de agregar un vértice a una 3-cadena tensa con frontera conexa (aquí la frontera sería la traza del nuevo vértice). \square

Teorema 2.21 *Existen 3-ciclos no tensos de orden $2^k(p-3)+2$ (y por tanto, 3-cadenas no tensas de orden $2^k(p-3)+1$, para todo primo no conexo p y $k \geq 0$.*

Prueba Para primos no conexos, del Lema 2.17 se tiene que $\mathcal{C}_{p,0}$ no es tensa. Si extraemos un vértice de un 3-ciclo no tenso, obtenemos una 3-cadena no tensa. Por este hecho y el Corolario 2.19 concluimos inductivamente que $\mathcal{L}_{p,k}$ y $\mathcal{C}_{p,k}$ para $k \geq 0$, son no tensos. \square

Finalmente, obsérvese que si pudiéramos agregarle al Corolario 2.19 un tercer punto **(c)** *$(H \diamond H) - x$ es tensa para algún vértice x en $H \diamond H$* , entonces una prueba inductiva similar a la del Teorema 2.21 podría ser utilizada para hacer más fuerte el Teorema 2.20. Esto requeriría de una selección correcta de los vértices a extraer en el proceso de iteración.

Veamos cómo se comportan los 3-ciclos obtenidos mediante el Método de acoplamiento, con respecto a la orientabilidad.

Independientemente de cómo sean las 3-cadenas que se acoplan, $\tilde{H} = H_0 \diamond_{\theta} H_1$ es no orientable. De hecho, para cualquier terna $\{x, y, z\}$ en H_1 , el camino simplicial x, y, z, x invierte su orientación en \tilde{H} . Para demostrar esto, veamos la traza de x . (Figura 10).

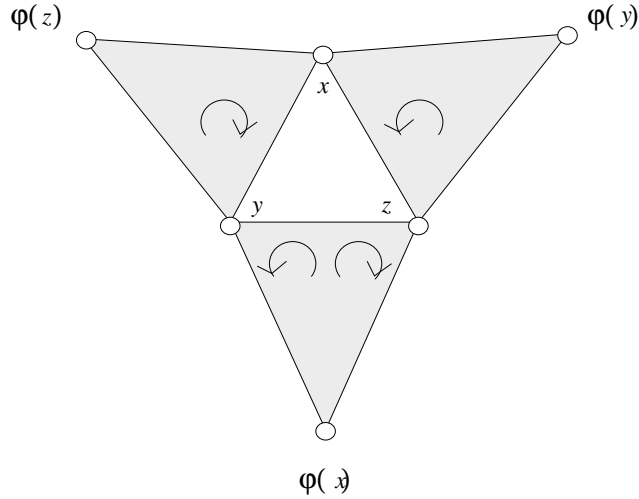


Figura 12.

Si $\{x, y, \theta(z)\}$ tiene la orientación $(x, y, \theta(z))$, entonces como $\widetilde{Tr}(x)$ está localmente orientada, la terna $\{x, \theta(y), z\}$ tiene la orientación $(x, z, \theta(y))$. Entonces, el mismo argumento basado en y y z , determina orientaciones opuestas a $\{\theta(x), y, z\}$. Esto lo podemos ver en la Figura 12 donde se presentan las tres ternas en \widetilde{H} que se obtienen a partir de $\{x, y, z\}$ en H_1 . Resulta un problema abierto saber si existen o no 3-ciclos orientables tensos.

Capítulo 3

3-árboles mínimos

En este capítulo presentaremos un método para construir 3-árboles mínimos de orden n , con $n \equiv 3, 4 \pmod{6}$. Para $n \equiv 3 \pmod{6}$ se parte de un sistema de ternas de Steiner, en el otro caso proponemos una construcción topológica a partir del anterior. Se describen las superficies obtenidas con respecto al número de componentes de la frontera y la orientabilidad.

3.1 Caso $n \equiv 3 \pmod{6}$.

Consideremos el grupo abeliano $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$, sus elementos serán los vértices de nuestras 3-gráficas. Luego, los vértices son pares ordenados (a, x) . Escribiremos ax para denotar al vértice (a, x) . Sólo consideraremos el caso en que t es impar, luego $n = |\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t| = 3t \equiv 3 \pmod{6}$.

Nótese que usaremos a para denotar un elemento de \mathbb{Z}_3 y x ó y para denotar elementos de \mathbb{Z}_t . El símbolo $+$ denotará la suma en el grupo indicado: \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_t ó $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$.

Si $e = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una terna de vértices y v es un vértice

entonces $e + v = \{v_1 + v, v_2 + v, v_3 + v\}$. Si F es un conjunto de ternas entonces $F + v$ es $\{f + v \mid f \in F\}$. Diremos que un conjunto de ternas F es *cerrado* si para todo $v \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ se tiene que $F = F + v$.

Consideremos los siguientes conjuntos de ternas:

$$\begin{aligned}\Delta_t^1 &= \{\{0x, 1x, 2x\} \mid x \in \mathbb{Z}_t\}, \\ \Delta_t^2 &= \left\{ \left\{ ax, ay, \left(a + 1, \frac{x + y}{2} \right) \right\} \mid \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}_3, \\ x, y \in \mathbb{Z}_t \end{array} \right\} \text{ y} \\ \Delta_t^3 &= \left\{ \left\{ ax, ay, \left(a + 1, \frac{x + y + 1}{2} \right) \right\} \mid \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}_3, \\ x, y \in \mathbb{Z}_t \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Como t es impar, Δ_t^2 y Δ_t^3 están bien definidos. Sea $\Delta = \Delta_t^1 \cup \Delta_t^2 \cup \Delta_t^3$, consideremos la 3-gráfica $G_t = \{\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t, \Delta\}$.

Introduzcamos alguna terminología. Para todo $x \in \mathbb{Z}_t$, llamaremos *columna* al conjunto de vértices $\{0x, 1x, 2x\}$. En una columna tenemos un orden cíclico natural inducido por el orden $0 < 1 < 2 < 0$ en \mathbb{Z}_3 . Por otro lado para todo $a \in \mathbb{Z}_3$, al conjunto de vértices $\{a0, a1, \dots, (a, t - 1)\}$ lo llamaremos *fila*. En una fila se tiene un orden cíclico natural inducido por el orden $0 < 1 < 2 < \dots < t - 1 < 0$ de \mathbb{Z}_t . Esta estructura toroidal de $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ (ver Figura 13) nos permite hablar de la siguiente (previa) columna o fila. Nótese que el conjunto Δ_t^1 es el conjunto de columnas.

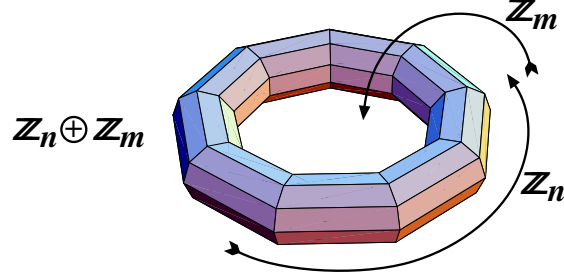


Figura 13. El toro $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$

Proposición 3.1 *Los conjuntos Δ_t^1, Δ_t^2 y Δ_t^3 son cerrados.*

Prueba Sea $e = \{0x, 1x, 2x\} \in \Delta_t^1$ y $v = ay \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$, entonces

$$e + v = \{(a, x + y), (a + 1, x + y), (a + 2, x)\} \in \Delta_t^1$$

luego Δ_t^1 es cerrado.

Sea $e = \{ax, ay, (a + 1, \frac{x+y}{2})\} \in \Delta_t^2$ y $v = bz \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$, entonces

$$e + v = \left\{ (a + b, x + z), (a + b, y + z), \left(a + b + 1, \frac{x + y}{2} + z \right) \right\}$$

Como

$$\frac{x + y}{2} + z = \frac{x + y}{2} + \frac{2z}{2} = \frac{x + y + 2z}{2} = \frac{(x + z) + (y + z)}{2}$$

Haciendo

$$\begin{aligned} c &= a + b \\ w &= x + z \\ r &= y + z \end{aligned}$$

se tiene que:

$$e + v = \left\{ cw, cr, \left(c + 1, \frac{w + r}{2} \right) \right\} \in \Delta_t^2$$

Análogamente, se comprueba que Δ_t^3 es cerrado. \square

Sea $Aut(G_t)$ el grupo de automorfismos de G_t .

Proposición 3.2 $Aut(G_t)$ es transitivo en vértices.

Prueba Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$. Demostremos que la función $p_{v_1, v_2} : \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ definida como: $p_{v_1, v_2}(v) = v + (v_2 - v_1)$, $\forall v \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ es un automorfismo de G_t .

Claramente p_{v_1, v_2} es una biyección de $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ en sí mismo, pues es una “rotación” de este, además manda ternas en ternas ya que

$$p_{v_1, v_2}(e) = e + (v_2 - v_1) \in \Delta, \quad \forall e \in \Delta$$

pues por la Proposición 3.1, Δ es cerrado. Luego $p_{v_1, v_2} \in Aut(G_t)$ y manda al vértice v_1 a v_2 , y se obtiene el resultado deseado. \square

Proposición 3.3 $\Delta_t^i \cap \Delta_t^j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.

Prueba Evidentemente, $\Delta_t^1 \cap (\Delta_t^2 \cup \Delta_t^3) = \emptyset$ ya que Δ_t^1 es el único que contiene ternas con los tres vértices en la misma fila. Por lo que sólo nos quedaría comprobar que $\Delta_t^2 \cap \Delta_t^3 = \emptyset$.

Sea $e = \{00, 01, (1, \frac{1}{2})\} \in \Delta_t^2$. Como $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{0+1+1}{2} = 1$, entonces $e \notin \Delta_t^3$. Luego, por la Proposición 3.1, $\Delta_t^2 \cap \Delta_t^3 = \emptyset$. \square

Proposición 3.4 *El número de ternas en G_t es $\frac{n(n-2)}{3}$.*

Prueba No es difícil comprobar que $|\Delta_t^1| = t$, $|\Delta_t^2| = |\Delta_t^3| = 3\binom{t}{2}$. Por la Proposición 3.3, se tiene que:

$$\left| \bigcup_{i=1}^3 \Delta_t^i \right| = |\Delta_t^1| + |\Delta_t^2| + |\Delta_t^3|.$$

Luego,

$$\left| \bigcup_{i=1}^3 \Delta_t^i \right| = t + 3t(t-1) = \frac{3t(3t-2)}{3} = \frac{n(n-2)}{3}.$$

□

Proposición 3.5 $S_t = (V, \Delta_t^1 \cup \Delta_t^2)$ *es un sistema de ternas de Steiner (STS).*

Prueba De la demostración de la Proposición 3.4 sabemos que $|\Delta_t^1 \cup \Delta_t^2| = t + 3\binom{t}{2} = \frac{t(3t-1)}{2}$ que es el número de ternas requeridas para un STS de orden $n = 3t$.

Veamos que todo par de elementos en V , aparece exactamente en una terna de S_t . Esencialmente hay tres tipos de parejas en V .

Si $\{v_1, v_2\}$ están en la misma columna, claramente hay exactamente una terna de Δ_t^1 que los contiene y no aparece en ninguna terna de Δ_t^2 . Si $\{v_1, v_2\}$ están en la misma fila, hay exactamente una terna de Δ_t^2 que los contiene y no aparece en ninguna terna de Δ_t^1 . Si se encuentran en filas y columnas distintas, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_1 = ax$ y $v_2 = (a+1, y)$. v_1 y v_2 aparecen en una terna de S_t si y sólo

si existe un elemento $v_3 = az$ tal que $\frac{x+z}{2} \equiv y \pmod{t}$ y hay un único z que satisface esta congruencia. \square

Es importante observar que S_t fue construido utilizando el método de Skolem (ver [1]).

Proposición 3.6 *Un par de vértices cualesquiera está contenido en una o dos aristas de G_t .*

Prueba Por la Proposición 3.5 S_t es un STS, luego un par de vértices cualquiera aparece en al menos una terna de G_t , por la Proposición 3.3 es suficiente probar que para cualquier par de vértices $\{u, v\}$, existe Δ_t^i , $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\{u, v\}$ no forma terna en Δ_t^i . Si $\{u, v\}$ están en la misma columna, entonces no pertenecen a Δ_t^2 ya que S_t es un STS y $\{u, v\}$ está en una terna de Δ_t^1 , de otra manera $\{u, v\}$ no forma terna en Δ_t^1 . \square

Teorema 3.7 *G_t es una 3-gráfica tensa.*

Este Teorema es uno de los resultados más importantes en este trabajo y será demostrado posteriormente.

Teorema 3.8 *Para todo t , G_t es una 3-cadena.*

Prueba Sea v un vértice de G_t . Por el Teorema 3.7 y el Lema Básico 2.1, la traza $Tr_{G_t}(v)$ es una gráfica conexa. Por la Proposición 3.2 y un argumento de conteo simple $Tr_{G_t}(v)$ no tiene ciclos. Por la Proposición 3.6 tiene que ser una cadena. \square

Analícemos con más detalle la traza de un vértice, la del 00 por ejemplo. Por definición es la gráfica con conjunto de

vértices $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t \setminus \{00\}$ y conjunto de aristas que es la unión de los conjuntos siguientes:

$$\Delta_t^1(00) = \{\{10, 20\}\},$$

$$\Delta_t^2(00) = \left\{ \left\{ 0x, \left(1, \frac{x}{2}\right) \right\}, \{2x, (2, -x)\} \mid x \in \mathbb{Z}_t \right\} \text{ y}$$

$$\Delta_t^3(00) = \left\{ \left\{ 0x, \left(1, \frac{x+1}{2}\right) \right\}, \{2x, (2, -x-1)\} \mid x \in \mathbb{Z}_t \right\}$$

Nótese que la traza de 00 restringida a la fila 2 es la cadena

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, \dots$$

en la que se omitió la primera coordenada (igual a 2) de cada vértice. Luego, por la Proposición 3.2 hemos probado que:

Proposición 3.9 *La traza de un vértice en la fila i , restringida a la fila $i - 1$ es una cadena.*

Proposición 3.10 *Una pareja de vértices está en la frontera de G_t si y sólo si es de la forma: $\{v, v + (1, 1/2)\}$. Las componentes conexas de la frontera son las clases $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t / \langle (1, 1/2) \rangle$. Si $t \equiv 0 \pmod{3}$ hay 3 componentes, de otra manera la frontera es conexa.*

Prueba Nótese que el vértice $(1, 1/2)$ tiene valencia 1 en la traza de 00. Por la Proposición 3.2 se tiene que en $Tr_{G_t}(v)$ el vértice $v + (1, 1/2)$ es de grado 1 $\forall v \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$, luego la arista $\{v, v + (1, 1/2)\}$ aparece en la frontera de G_t . De aquí que las componentes conexas de la frontera quedan determinadas por las clases $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t / \langle (1, 1/2) \rangle$. Como 1 es generador de \mathbb{Z}_3 y $1/2$

es generador de \mathbb{Z}_t , si $t \equiv 0 \pmod{3}$ hay 3 componentes, de otra manera la frontera es conexa. \square

Pasemos a demostrar el importante Teorema 3.7.

Prueba Supongamos que no es cierto. Sea $\{R, V, A\}$ una 3-coloración propia de $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ que no deja ternas heterocromáticas en G_t . Usaremos la notación $a : \dots \overset{x}{R} \dots$ para denotar que en la fila a el x -ésimo vértice está en R (está coloreado de rojo).

El “triángulo” de colores tiene dos orientaciones: $R \rightarrow V \rightarrow A \rightarrow R$ ó $R \leftarrow V \leftarrow A \leftarrow R$. Veamos que el orden cíclico en una fila heterocromática es compatible con una de estas dos orientaciones de los colores. Supongamos que tenemos la coloración

$$a : \dots \overset{x}{R} \overset{x+1}{V} \dots \overset{y}{R} \overset{y+1}{A} \dots$$

y denotemos por Θ al vértice $(a+1, \frac{x+y+2}{2})$.

Como las ternas $\{ax, (a, y+1), \Theta\}$, $\{ay, (a, x+1), \Theta\}$ y $\{(a, x+1), (a, y+1), \Theta\}$ están en G_t (ver Figura 14) entonces independientemente del color de Θ , aparecerá una terna heterocromática. Luego podemos hablar de la orientación de una fila heterocromática, en el sentido anterior.

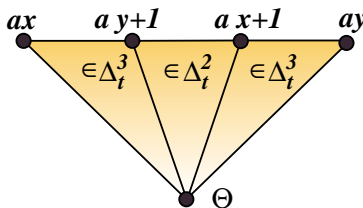


Figura 14. Las filas tienen orientación

Sea a una fila heterocromática. Podemos demostrar que cualquier color (digamos R) aparece en la siguiente fila. Sin pérdida de generalidad, tenemos la coloración

$$a : \dots \overset{x}{R} \dots \overset{y}{V} \overset{y+1}{A} \dots$$

y denotemos por Θ al vértice $(a + 1, \frac{x+y+1}{2})$. Como $\{ax, ay, \Theta\}$ y $\{ax, (a, y + 1), \Theta\}$ son ternas en G_t (ver Figura 15), Θ tiene que ser R . Por tanto si una fila es heterocromática, la que le sigue también lo es.

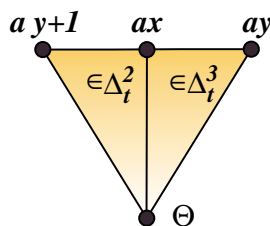


Figura 15. Caso de fila heterocromática

Si todas las filas son monocromáticas, toda terna en Δ_t^1 está coloreada con los tres colores, lo cual es imposible.

Si una fila es bicromática, por la Proposición 3.9, ningún vértice de la siguiente fila puede estar coloreado con el tercer color.

Supongamos que existe una fila bicromática a , digamos rojo-verde. En la fila $a + 1$ no hay vértices azules, por la observación anterior. Si $a + 1$ es una fila rojo-verde, entonces la fila $a + 2$ no tiene vértices azules y esto contradice el hecho de que la coloración sea propia. Luego, podemos suponer que la fila $a + 1$ es monocromática roja y que la fila $a + 2$ tiene vértices azules. Si la fila $a + 2$ es monocromática azul, alguna terna de Δ_t^1 es

heterocromática (imposible). Si la fila $a + 2$ es bicromática, independientemente de como se escoja el segundo color, el tercer color aparecerá en la fila siguiente (fila a), lo cual es imposible. Por tanto la fila $a + 2$ es heterocromática y como habíamos visto anteriormente, todas las filas tienen que ser heterocromáticas.

Como hay tres filas y dos orientaciones, podemos suponer que hay una fila (digamos la 0) tal que la que le sigue tiene la misma orientación.

Si la fila 0 no tiene dos vértices consecutivos con el mismo color, entonces $t \equiv 0 \pmod{3}$ y tendríamos la siguiente coloración

$$0 : \overset{0}{R} \overset{1}{V} \overset{2}{A} \overset{3}{R} \dots \overset{-3}{R} \overset{-2}{V} \overset{-1}{A} .$$

Como $\{10, 00, (0, -1)\}$ y $\{10, 01, (0, -1)\}$ son ternas en G_t , el vértice 10 tiene que estar coloreado de azul y por la similitud de los vértices (Proposición 3.2) tenemos la coloración

$$1 : \overset{0}{A} \overset{1}{R} \overset{2}{V} \overset{3}{A} \dots \overset{-3}{A} \overset{-2}{R} \overset{-1}{V} .$$

Por el mismo argumento, la fila 2 tiene la siguiente coloración

$$2 : \overset{0}{V} \overset{1}{A} \overset{2}{R} \overset{3}{V} \dots \overset{-3}{V} \overset{-2}{A} \overset{-1}{R},$$

por lo que cualquier terna en Δ_t^1 es heterocromática.

De aquí que en la fila 0 hay un vértice $0y$ tal que $(0, y + 1)$ es del mismo color y $(0, y - 1)$ es de un color diferente. En dicho caso tenemos la coloración

$$0 : \dots \overset{x}{R} \overset{x+1}{V} \dots \overset{y-1}{V} \overset{y}{A} \overset{y+1}{A} \dots$$

Denotemos por Θ el vértice $(1, \frac{x+y}{2})$. Como las ternas

$$\{(0, x + 1), (0, y + 1), \Theta + 01\}, \{0x, (0, y + 1), \Theta + 01\}, \\ \{0x, (0, y - 1), \Theta\} \text{ y } \{0x, 0y, \Theta\}$$

están en G_t entonces Θ es rojo y el vértice $\Theta + 01$ es azul. Esto contradice el hecho de que las filas 0 y 1 tienen la misma orientación (ver Figura 16). \square

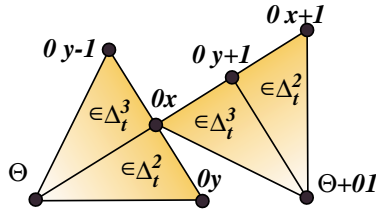


Figura 16. La contradicción

3.2 Caso $n \equiv 4 \pmod{6}$

Sea M una 3-cadena de n vértices. Por un argumento de conteo sencillo n no puede ser congruente con $1 \pmod{3}$. Por los trabajos de Ringel, Young y otros (ver [7]) sabemos que para n congruente $0, 2 \pmod{3}$ hay 3-cadenas con n vértices.

Cuando $n \equiv 1 \pmod{3}$, la cota inferior para el número de ternas en una 3-gráfica tensa es $\frac{n(n-2)+1}{3}$. Esta cota puede ser alcanzada por una 3-gráfica donde la traza de un vértice es un ciclo y la de cualquier otro vértice es una cadena. A estas 3-gráficas las llamaremos *casi 3-cadenas*.

Sea M una 3-cadena con n vértices y $n \equiv 0 \pmod{3}$. Si M tiene $\frac{n}{3}$ ternas disjuntas sin aristas en la frontera y la frontera

de M es conexa, entonces hay una manera sencilla de obtener una casi 3-cadena \widetilde{M} con $n + 1$ vértices, pegándole un cono de ternas con centro en un nuevo vértice, a la frontera de M (ver Figura 17) y extrayendo el conjunto de ternas disjuntas. Es interesante observar que no se conoce si el hecho de que M sea tensa conduzca a que \widetilde{M} lo sea.

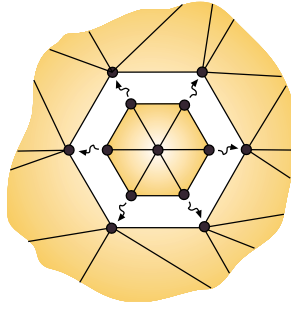


Figura 17. Pegar un cono a la frontera

Nuestro propósito es generalizar este método de construcción para el caso en que la frontera de M no sea conexa.

Primeramente, vamos a extraer de M un conjunto T de $\frac{n}{3}$ ternas disjuntas que no tienen aristas en la frontera de M , obteniendo una 3-gráfica M' . Nótese que M' ya no es superficie, pero su 1-esqueleto sigue siendo una gráfica completa. Denotemos por $\partial M'$ la *gráfica frontera* de M' , es decir, la gráfica cuyas aristas son las parejas de vértices de M' que pertenecen exactamente a una terna de M' .

Por construcción, a cada vértice de $\partial M'$ inciden 2 aristas de la frontera de M y dos aristas de una de las ternas de T . Luego, $\partial M'$ es una gráfica 4-regular. Deseamos encontrar un ciclo hamiltoniano H en $\partial M'$, pero no cualquiera, uno que satisfaga la siguiente condición: si v es un vértice del ciclo H y

v^- , v^+ son los vértices adyacentes a v en H , entonces v^- y v^+ no están en la misma componente conexa de la gráfica $Tr_M(v)$.

Si $\partial M'$ posee un ciclo hamiltoniano con estas propiedades, entonces pegando un cono de ternas con centro en un nuevo vértice, a H , obtenemos una 3-gráfica \widetilde{M} y la siguiente Proposición se satisface.

Proposición 3.11 \widetilde{M} es una casi 3-cadena

Prueba Sea α el nuevo vértice, la traza de α es el ciclo H . Sea v cualquier otro vértice en \widetilde{M} . Los vértices v^- y v^+ son extremos de las dos cadenas que constituyen la traza de v en M . Como están unidos por la aristas $\{\alpha, v^-\}$ y $\{\alpha, v^+\}$, entonces la traza de v es una cadena. \square

El conjunto Δ_t^1 de todas las columnas es un conjunto de ternas disjuntas en G_t que no tiene aristas en la frontera. Sea $G'_t = \{\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t, \Delta \setminus \Delta_t^1\}$, sea H la unión sobre todos los $x \in \mathbb{Z}_t$ de las cadenas

$$2x \rightarrow 0x \rightarrow 1x \rightarrow (2, x + 1/2)$$

. Como $1/2$ es un generador de \mathbb{Z}_t , H es un ciclo hamiltoniano, además $\{2x, 0x\}$ y $\{0x, 1x\}$ son parejas contenidas en ternas de Δ_t^1 y por la Proposición 3.10, el par $\{1x, (2, x + 1/2)\}$ es una arista de la frontera de G_t . Luego H es un ciclo hamiltoniano en $\partial G'_t$. Demostremos que H cumple con la propiedad establecida anteriormente.

Proposición 3.12 Para todo vértice v , los vértices v^- y v^+ definidos por la subcadena de H : $v^- \rightarrow v \rightarrow v^+$ están en distintas componentes conexas de la traza de v en G'_t .

Prueba Por las Proposiciones 3.2, 3.9 y 3.10 se tiene que la traza de los vértices $0x$, $1x$ y $2x$, $x \in \mathbb{Z}_t$ en G'_t son de la forma:

$$Tr(0x) : (1, x + 1/2) \dots 1x \not\sim 2x \dots (2, x - 1/2)$$

$$Tr(1x) : (2, x + 1/2) \dots 2x \not\sim 0x \dots (0, x - 1/2)$$

$$Tr(2x) : (0, x + 1/2) \dots 0x \not\sim 1x \dots (1, x - 1/2)$$

donde $\not\sim$ entre dos vértices significa que no hay arista entre ellos. Luego, la traza de cualquier vértice en G'_t son dos cadenas (resultado de extraer Δ_t^1 a G_t). Nótese que \mathbb{Z}_t tiene una acción natural sobre H al adicionar $(0, 1/2)$. En H hay tres tipos de subcadenas de tamaño tres:

$$\begin{aligned} &2x \rightarrow 0x \rightarrow 1x, \\ &0x \rightarrow 1x \rightarrow (2, x + 1/2) \text{ y} \\ &1x \rightarrow (2, x + 1/2) \rightarrow (0, x + 1/2) \end{aligned}$$

que son las que tienen como vértice central a un vértice de la fila 0, uno de la fila 1 y uno de la fila 2, respectivamente. Se puede comprobar en el diagrama anterior que los vértices $2x$ y $1x$ están en cadenas distintas de la traza de $0x$ en G'_t , análogamente se cumple esta propiedad para los vértices $0x$ y $(2, x + 1/2)$ en la traza de $1x$ y para los vértices $1x$ y $(0, x + 1/2)$ en la traza de $(2, x + 1/2)$. \square

Corolario 3.13 \widetilde{G}_t es una casi 3-cadena con frontera conexa

Prueba Que \widetilde{G}_t es una casi 3-cadena es consecuencia directa de la Proposición anterior. Veamos que su frontera es conexa. Claramente, $\partial\widetilde{G}_t$ es el conjunto de aristas \overline{H} en $\partial G'_t$ que no está en H . En $\partial G'_t$ hay seis tipos de aristas, tres asociados a las ternas de Δ_t^1 que son: $\{2x, 0x\}, \{0x, 1x\} \in H$ y $\{1x, 2x\} \in \overline{H}$ y tres tipos de aristas asociados a la frontera

de G_t , que son: $\{1x, (2, x + 1/2)\} \in H$ y $\{(2, x - 1/2), 0x\}$, $\{0x, (1, x + 1/2)\} \in \overline{H}$. Luego, \overline{H} es la unión sobre todos los $x \in \mathbb{Z}_t$ de las cadenas

$$(2, x - 1/2) \rightarrow 0x \rightarrow (1, x + 1/2) \rightarrow (2, x + 1/2).$$

Nótese que \overline{H} es un ciclo hamiltoniano por las mismas razones que H . \square

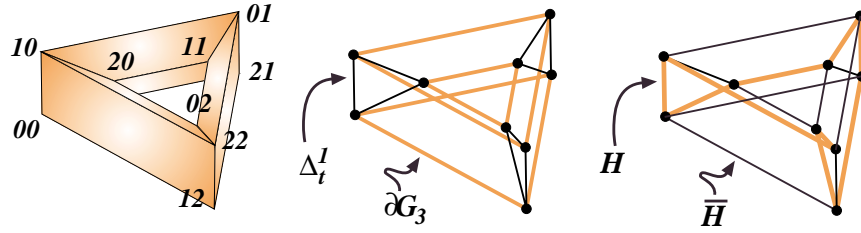


Figura 18. La gráfica frontera $\partial G_3'$

Teorema 3.14 \widetilde{G}_t es una 3-gráfica tensa

Prueba La base de la demostración es la prueba del Teorema 3.7. Sea α el nuevo vértice en \widetilde{G}_t . Nuevamente, sea $\{R, V, A\}$ una 3-coloración propia de $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t \cup \alpha$ que no tiene ternas heterocromáticas en \widetilde{G}_t .

Si ningún vértice distinto de α está coloreado de rojo, entonces α tiene que estar coloreado de rojo. Luego alguna arista $\{v, v'\}$ de H es bicolor y la terna $\{v, \alpha, v'\}$ es heterocromática, de aquí que la coloración es propia en $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$.

Nuevamente, las filas heterocromáticas tienen orientación ya que las ternas de Δ_t^1 no aparecen en la prueba de esta parte del Teorema 3.7. Por el mismo argumento, si una fila es heterocromática, la que le sigue también lo es.

Si todas las filas son monocromáticas, en la subcadena de H :

$$20 \rightarrow 00 \rightarrow 10 \rightarrow (2, 1/2)$$

aparece cualquier bicoloración posible de una arista por lo que independientemente del color que se le dé a α , tendremos una terna heterocromática.

Nótese que la Proposición 3.9 también se satisface en \widetilde{G}_t . De aquí que si una fila es bicolor, la que le sigue no está coloreada con el tercer color.

Sea a una fila bicolorada rojo-verde. Nuevamente, podemos suponer que la fila $a + 1$ es monocromática roja y la fila $a + 2$ tiene vértices azules. La fila $a + 2$ no puede ser bicolor ya que el tercer color aparecería en la fila a . Supongamos que la fila $a + 2$ es monocromática azul. Sea v un vértice azul en la fila a y sea $v^- \rightarrow v \rightarrow v^+ \rightarrow v^{++}$ una subcadena en H que contiene a v . Nótese que v^- y v^{++} son azules y que v^+ es rojo, de aquí que independientemente del color de α se tendría una terna heterocromática. Luego, la fila $a + 2$ es heterocromática y por tanto todas las filas son heterocromáticas.

Podemos suponer que las filas 0 y 1 tienen la misma orientación. Si la fila 0 no tiene dos vértices consecutivos con el mismo color, entonces como en la prueba del Teorema 3.7, podemos concluir que los vértices en $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_t$ están coloreados de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} 0 : \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & -3 & -2 & -1 \\ R & V & A & R & \dots & R & V & A \end{array} \\ 1 : \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & -3 & -2 & -1 \\ A & R & V & A & \dots & A & R & V \end{array} \\ 2 : \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & -3 & -2 & -1 \\ V & A & R & V & \dots & V & A & R \end{array} \end{array}$$

y $t \equiv 0 \pmod{3}$. De aquí que $\{00, 10\}$, $\{01, 11\}$ y $\{02, 12\}$ son aristas rojo-azul, verde-rojo y azul-verde respectivamente, en H y alguna de ellas forma con α una terna heterocromática.

El caso en que la fila 0 tiene dos vértices consecutivos con el mismo color se demuestra de la misma manera que en el Teorema 3.7. \square

3.3 Sobre la orientabilidad

Veamos como se comportan las superficies obtenidas, con respecto a la orientabilidad.

Proposición 3.15 *Las superficies G_t y \widetilde{G}_t son no orientables.*

Prueba De hecho, para cualquier trío de elementos distintos en \mathbb{Z}_t , x, y y z , el camino simplicial, $0x, 0y, 0z, 0x$ invierte su orientación en G_t y \widetilde{G}_t . Para ver esto, observemos la traza de $0x$ en G_t y \widetilde{G}_t en la Figura 19, donde se puede notar cómo están ordenadas las primeras coordenadas de los vértices en la traza de $0x$ en G_t . \square

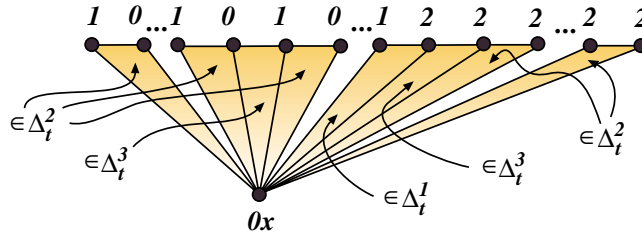


Figura 19. La forma de la traza de $0x$ en G_t

Esta estructura de la traza de $0x$ en G_t se deduce de la Proposición 3.9 y del hecho de que $S_t = (V, \Delta_t^1 \cup \Delta_t^2)$ es un STS (Proposición 3.5). Como sólo extraemos una terna de Δ_t^1 en G_t para obtener la traza de $0x$ en \widetilde{G}_t , esta traza tiene la misma estructura que la traza correspondiente en G_t . De aquí que si a la terna $\{0x, 0y, (1, \frac{x+y}{2})\} \in \Delta_t^2$ se le da la orientación $(0x, 0y, (1, \frac{x+y}{2}))$, entonces la terna $\{0x, 0z, (1, \frac{x+z}{2})\}$ tiene la orientación $(0x, 0z, (1, \frac{x+z}{2}))$, ya que $0x$ es localmente orientable (también lo es la traza de $0x$). Utilizando el mismo argumento basado en $0y$ y $0z$, obtenemos orientaciones opuestas para la terna $\{0y, 0z, (1, \frac{y+z}{2})\} \in \Delta_t^2$.

Bibliografía

- [1] I. ANDERSON, “Combinatorial Designs: Construction Methods”. John Wiley & Sons (1990).
- [2] J. L. AROCHA, J. BRACHO, V. NEUMANN-LARA, On the minimum size of tight hypergraphs. *J. Graph Theory* **16**, No. 4 (1992), 319-326.
- [3] J. L. AROCHA, J. BRACHO, V. NEUMANN-LARA, Tight and untight triangulations of surfaces by complete graphs. *J. Combin. Theory Ser B* **63**, No.2 (1995), 185-199.
- [4] R. L. GRAHAM, “Rudiments of Ramsey Theory”. AMS, Providence, RI (1981).
- [5] L. LOVASZ, Topological and algebraic methods in graph theory, in “Graph theory and related topics”. Proceedings of Conference in Honour of W. T. Tutte (Waterloo, Ontario, 1977). Academic Press, New York, (1979) 1-14.
- [6] V. NEUMANN-LARA, The acyclic disconnection of a digraph. *Publicaciones Preliminares del Inst. de Mat., UNAM*, No.517 (1997).
- [7] G. RINGEL, “Map Color Theorem”. Springer Verlag, (1974).