

El número heterocromático de triangulaciones de superficies

Pilar Valencia Saravia

18 de Junio de 1998

Indice

1	Introducción	3
	Un poco de historia	6
	Un caso aparte: la tensión de hipergráficas	14
2	La Esfera	16
	Trayectorias inducidas largas	17
3	El disco	25
	Propiedades del número de cubrimiento	26
	Triangulaciones sin puntos interiores	28
	Triangulaciones con puntos interiores	35
	La Cota Inferior	36
	La Cota Superior	39

A lo largo de este siglo, los problemas tipo Ramsey han despertado el interés de muchos matemáticos en el mundo, generando gran cantidad de investigaciones en diversas ramas de las matemáticas e influyendo al mismo tiempo en muchas otras áreas del conocimiento.

En este contexto, un planteamiento clásico, dentro de la Teoría de Gráficas, es el siguiente:

Cualquier gráfica de orden $n(k)$ suficientemente grande, contiene una subgráfica completa o un conjunto independiente de orden k .

Las interpretaciones más frecuentes que se han hecho de este resultado son en términos de coloraciones: dada una estructura de cierta clase, se asocia una coloración arbitraria a sus subestructuras más pequeñas y lo que se pretende es demostrar la existencia de una subestructura monocromática con ciertas características. Así, el teorema siguiente es una de las formas más sencillas de este tipo de resultados y se incluye en prácticamente cualquier texto introductorio de Teoría de Gráficas:

Teorema 1.1 *En toda coloración de las aristas de K_6 con dos colores, existe un triángulo monocromático.*

Existen diversos y muy interesantes ejemplos de problemas tipo Ramsey, una aproximación mucho más detallada es realizada en [15].

Desde que F. Ramsey publicara el primer artículo con problemas de este estilo [24], la investigación por estos senderos no se ha detenido, sin embargo alrededor de la mitad del siglo la curiosidad dirigió la atención de algunos a la contraparte del planteamiento original: los problemas de tipo anti-Ramsey, en los que se pretende asegurar la existencia de subestructuras heterocromáticas (sin colores repetidos) de cierto tipo, contenidas en alguna estructura “mayor” que se ha coloreado de algún modo. El nuevo enfoque no sólo resultó interesante como problema combinatorio, sino además especialmente útil para dar solución a cuestiones de otra índole en ramas de las matemáticas ajenas a la Combinatoria. A lo largo de los años, ha habido muchos esfuerzos encaminados a encontrar resultados análogos a los que conforman la Teoría de Ramsey en su versión anti-Ramsey. En la literatura se distinguen muy diversas perspectivas en el manejo de estos problemas.

Cabe mencionar que todos los resultados de la Teoría de Ramsey pueden ser expresados en la terminología de hipergráficas de manera sencilla, y así mismo son frecuentemente planteados los problemas de tipo anti-Ramsey. Con el afán de unificar el lenguaje introduciremos aquí unas cuantas definiciones.

Una **hipergráfica** H es una pareja de conjuntos V, E , a los elementos del primero les llamamos vértices, y a los del segundo aristas. Cada arista es un subconjunto de vértices. Decimos que H es una r -gráfica si todas sus aristas tienen cardinalidad r , particularmente a las 2-gráficas les llamamos simplemente gráficas. Una **k-coloración** de una hipergráfica es una aplicación suprayectiva de sus vértices sobre un conjunto de k elementos: el conjunto de colores. Si una coloración asigna colores distintos a todos los vértices de una arista, decimos que tal arista es **heterocromática** y por extensión, llamamos heterocromática a la coloración (en la literatura también aparece este concepto con los términos policromática, fuertemente coloreada o totalmente multicoloreada).

El **número heterocromático** de H , denotado por $h(H)$, es el mínimo número de colores necesarios para que toda $h(H)$ -coloración de H sea heterocromática.

En 1973, en Keszthely, Hungría se llevó a cabo el Coloquio de la Sociedad Matemática János Bolyai con el tema “Conjuntos Infinitos y Finitos”. Ahí empieza a manifestarse el trabajo que se había estado haciendo alrededor de los problemas anti-Ramsey. Rado, por ejemplo, presenta ahí una versión conjuntista del planteamiento anti-Ramsey [23]. Erdős, Simonovits y Sós, participan con la que sería su primera aportación al tema, *Anti-Ramsey Theorems*, [12], en la que hacen notar la relación que existe entre estos problemas y la Teoría Extremal de Gráficas, particularmente con los resultados obtenidos por Turán. La simbiosis anti-Ramsey—Turán es una constante en casi todas las investigaciones realizadas sobre el tema como apreciaremos más adelante. En este mismo artículo, y aunque con un enfoque y terminología distintos, ellos estudian el número heterocromático de ciertas hipergráficas y establecen varios resultados y conjeturas interesantes que reseñaremos con más detalle en la siguiente sección.

También en el mismo coloquio el francés Sterboul presenta su trabajo *A New Combinatorial Parameter*, [27]. El también estaba estudiando el número heterocromático sólo que lo llama *número cromático* y se aproxima al concepto de un modo distinto al de los húngaros y un poco más cercano al nuestro. Durante los años siguientes Sterboul continuó trabajando en el tema. Seguiremos hablando de él más adelante.

Arocha, Bracho y Neumann-Lara publican en [5] el siguiente resultado interesante que es una versión anti-Ramsey de un teorema de Schur (puede encontrarse en [15], secc. 3.1):

Teorema 1.2 *Sea $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ el grupo multiplicativo de \mathbb{Z}_p . Para toda 3-coloración de \mathbb{Z}_p^* existe una solución heterocromática de la ecuación $x + y = z$.*

Decimos que una ecuación de tres variables es **tensa** si para toda

3-coloración del conjunto de coeficientes existe una solución heterocromática. Así el resultado anterior afirma que $x + y = z$ es tensa en \mathbb{Z}_p^* . En [18] se clasifican todas las ecuaciones tensas y no tensas con coeficientes sobre \mathbb{Z}_p^* .

La definición como tal de número heterocromático, fue introducida a principios de esta década en [5], pero como vimos, desde antes se hacía investigación alrededor de este concepto. La siguiente sección nos brinda un breve panorama acerca de los resultados más significativos obtenidos hasta ahora.

En esta tesis nuestro objetivo principal es calcular el número heterocromático de 3-gráficas provenientes de triangulaciones de superficies: los vértices corresponden a los de la triangulación y las ternas a las caras.

En el primer capítulo estudiaremos las triangulaciones de la esfera obteniéndose como resultado principal el comportamiento asintótico del número heterocromático (en términos del orden de la triangulación).

El segundo capítulo analiza las triangulaciones del disco. Se obtiene el valor exacto del número heterocromático en el caso en que no hay vértices interiores; para el caso general se proporcionan cotas inferiores y superiores y se muestran ejemplos de familias de triangulaciones que las alcanzan.

Un poco de historia

Las investigaciones realizadas en esta área han seguido muy diversos objetivos y estilos. Algunos autores han proporcionan algoritmos que verifiquen la existencia de subgráficas heterocromáticas, por ejemplo, en [7], aparece un algoritmo para encontrar un conjunto con al menos

$(2n)^{\frac{1}{3}}$ vértices que induzca una subgráfica heterocromática, en la gráfica completa de orden n , cuyas aristas han sido coloreadas propiamente, es decir, aristas que comparten algún vértice reciben colores distintos.

Otros autores establecen condiciones suficientes de distintos tipos, tales como condiciones estructurales o restricciones de orden, tamaño o grado, entre otras, que aseguren la existencia de tales subgráficas. Por ejemplo, Chung y Graham en [10], definen para $s, t, k \in \mathbb{N}$, la función $f(s, t, k)$ que asocia a esta terna el orden máximo de una completa cuyas aristas pueden colorearse con k colores de modo que toda K_s tiene exactamente t colores. Así, para $t = \binom{s}{2}$, se buscan completas heterocromáticas de orden s como subgráficas de una completa de orden mayor.

Alon y Lefmann en [4], consideran una r -gráfica de orden n y una coloración propia de sus aristas y demuestran la existencia de una r -subgráfica heterocromática de cierto tamaño. En el mismo contexto, se publica en [3] el siguiente resultado:

Teorema 1.3 *En toda coloración de las aristas de una gráfica G cuyas clases cromáticas inducen subgráficas bipartitas, existe un subárbol heterocromático de tamaño al menos $\max\{p, q\}$, donde p es el número de valores propios positivos de G y q el número de negativos.*

En [25], Rödl y Tuza, demuestran la existencia de gráficas G de cuello arbitrariamente grande tales que cualquier coloración propia de sus aristas, tiene un ciclo heterocromático. Completando este resultado, poco tiempo después Kohayakawa y Luczak [17], demuestran que para toda $l \geq 3$ existe una gráfica G_l de cuello l en la que toda coloración propia de sus aristas tiene un ciclo heterocromático que realiza el cuello.

Un caso especial de coloraciones de aristas es estudiado por Hahn et al.[16]: las *coloraciones acotadas*, en las que se impone la restricción de no usar un mismo color más de un cierto número de veces; ellos investigan también lo que llaman *número sub-Ramsey*, $sr(G, t)$, que es el orden mínimo de una completa en la que toda coloración de sus

aristas, acotada por t , tiene una copia de G heterocromática. En el mismo contexto, Frieze y Reed [14], demuestran que si se da a las aristas de K_n una coloración acotada por $t = \lceil \frac{n}{c \ln n} \rceil$, para c suficientemente grande, existe un ciclo hamiltoniano heterocromático.

Sterboul y Wertheimer estudiaron en [31], un tipo particular de coloraciones de r -gráficas a las que llamaron *extremas*. Estas son coloraciones de los vértices en las que toda arista es monocromática o heterocromática, ellos investigaron el máximo tamaño que puede tener una r -gráfica de orden n que acepta una coloración extrema.

Otro enfoque distinto al estudiar este tipo de problemas es el de buscar la cantidad mínima de colores que aseguren la existencia de ciertas estructuras heterocromáticas. Por ejemplo, en los artículos [9] y [8], Burr et. al., introducen el concepto de *número cromático fuerte*, que es el mínimo número de colores con que se pueden colorear los vértices de una hipergráfica de modo que *todas* sus aristas sean heterocromáticas. Después extienden el concepto con lo que denominan *número anti-Ramsey extremo*: dada una gráfica L y dos naturales n, e es el mínimo natural k tal que existe una gráfica G de orden n y tamaño e , en la que en toda k -coloración de sus aristas, todas las subgráficas isomorfas a L son heterocromáticas. Por cierto que en estos trabajos también queda establecida la relación existente con los problemas de tipo Turán.

Dentro de esta aproximación se encuentra también el cálculo del número heterocromático. Aquí los resultados más significativos han sido propuestos por los húngaros, Sterboul y nuestro grupo de investigación en Combinatoria del Instituto de Matemáticas. Este grupo, encabezado por Arocha, Bracho y Neumann-Lara ha hecho destacables aportaciones en el área desde la mitad de la década pasada. Entre sus principales aportaciones se encuentra la introducción del concepto de *tensión de hipergráficas* como generalización de la conexidad en gráficas, pero este es un caso aparte que merecerá nuestra atención más adelante.

Como expusimos anteriormente, los húngaros encontraron interesantes relaciones entre los problemas anti-Ramsey y los de tipo Turán. Este matemático se preguntó ¿cuál es el tamaño máximo de una gráfica de orden n que no contenga como subgráfica algún elemento de una familia de gráficas \mathcal{L} ?, y lo encontró para algunas familias particulares (veáse por ejemplo [13] pp. 15-17). A este valor se le conoce como el **número de Turán** $\mathcal{T}(n, \mathcal{L})$, y las gráficas que lo realizan son llamadas *gráficas extremales*.

En la primera mitad de la década de los sesenta, Erdős y Simonovits, que se encontraban estudiando Teoría Extremal obtuvieron el siguiente resultado [11]:

Teorema 1.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{T}(n, \mathcal{L})}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{d}$$

donde $d + 1 = \min_{G \in \mathcal{L}} \chi(G)$, y $\chi(G)$ es el número cromático de G .

Probablemente en esa época empezaban a interesarse por los problemas anti-Ramsey. Siete años después aparece la primera de sus publicaciones en el área [12], donde dejan establecida la relación anti-Ramsey—Turán.

En este artículo se consideran coloraciones de aristas en gráficas completas y específicamente se estudia el siguiente problema: Sea G una gráfica de orden n , ¿cuál es el máximo número de colores con que se pueden colorear las aristas de K_n sin contener una subgráfica heterocromática isomorfa a G ?. En lo sucesivo denotaremos a este valor como $\beta(n, G)$. Observemos el siguiente hecho: si asociamos a G la hipergráfica $H_{n,G}$, en la que los vértices corresponden a las aristas de K_n y cuyas aristas representan los subconjuntos de aristas de K_n que forman una subgráfica isomorfa a G , entonces $\beta(n, G) = h(H_{n,G}) - 1$.

El siguiente es el primer teorema del artículo:

Teorema 1.5 *Si $d + 1 = \min \{\chi(G - e) \mid e \in E(G)\}$, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(n, G)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{d}.$$

Con este resultado queda establecido el hecho de que el número heterocromático tiene el mismo comportamiento asintótico que el número de Turán (véase el teorema 1.4).

Más adelante obtienen un resultado similar para r -gráficas, $r > 2$. Generalizan las definiciones de β y \mathcal{T} de la siguiente manera:

- $\mathcal{T}_r(n, \mathcal{H})$ es el tamaño máximo de una r -gráfica de orden n que no contenga como r -subgráfica ningún elemento de una familia \mathcal{H} de r -gráficas,
- $\beta_r(n, H)$ es el máximo número de colores con que se pueden colorear las aristas de la r -gráfica completa de orden n de modo que no contenga una r -subgráfica heterocromática isomorfa a H .

En este contexto, obtienen el resultado siguiente:

Teorema 1.6 *Sea H una r -gráfica y $\mathcal{H} = \{H - e \mid e \in E(H)\}$, entonces $\beta_r(n, H) - \mathcal{T}_r(n, \mathcal{H}) = o(n^r)$.*

En la presente tesis, daremos una mejor estimación para ciertos tipos de 3-gráficas.

Notemos que el teorema 1.5 proporciona una estimación asintótica exacta para $\beta(n, G)$ cuando $d \geq 2$. El caso $d = 1$, es decir, cuando existe $e' \in E(G)$ tal que $G - e'$ es bipartita, es mucho más complejo en general, en el artículo se analizan separadamente los casos en que G es una trayectoria o un ciclo. Se establecen las siguientes conjeturas:

Conjetura 1.7 Sean $t \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon = 0, 1$ y $m = 2t + 3 + \varepsilon$, entonces

$$\beta(n, P_m) = \begin{cases} tn - \binom{t+1}{2} + 1 + \varepsilon, & \text{si } n \geq \frac{1}{2}(5t + 3 + 4\varepsilon) \\ \binom{m-2}{2} + 1, & \text{si } m \leq n \leq \frac{1}{2}(5t + 3 + 4\varepsilon). \end{cases}$$

Conjetura 1.8 $\beta(n, C_m) = n \left(\frac{m-2}{2} + \frac{1}{m-1} \right) + O(1)$.

Esta última es demostrada para $m = 3$. Años después, en [2], Alon la verifica par $m = 4$, demostrando que $\beta(n, C_4) = n + \frac{n}{3} - 1$.

Otro resultado interesante en el mismo artículo es el siguiente:

Teorema 1.9 Sea $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 4$, existe n_p tal que si $n > n_p$, entonces

$$\beta(n, K_p) = \mathcal{T}(n, K_{p-1}) + 1.$$

Posteriormente, en [21], Neumann-Lara y Montellano demuestran que $\beta(n, K_3) = n + 1$ y generalizan este teorema para cualquier valor de n :

Teorema 1.10 Si $n, p \in \mathbb{N}$, y $4 \leq p < n$, entonces

$$\beta(n, K_p) = \mathcal{T}(n, K_{p-1}) + 1.$$

Recientemente, ellos han verificado la Conjetura 1.8 para el caso en que $n \equiv 0 \pmod{m-1}$, [22]:

Teorema 1.11 Sean $n \geq m \geq 5$ y supongamos que $n \equiv t \pmod{m-1}$,

(a) si $t = 0$ entonces $\beta(n, C_m) = n \left(\frac{m-2}{2} + \frac{1}{m-1} \right) - 1$

(b) si $1 \leq t \leq m-2$ entonces

$$\begin{aligned} \beta(n, C_m) &\geq \lfloor \frac{n}{m-1} \rfloor \binom{m-1}{2} + \binom{t}{2} + \lceil \frac{n}{m-1} \rceil - 1 \\ \beta(n, C_m) &\leq (n-t) \left(\frac{m-2}{2} + \frac{1}{m-1} \right) + t \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor - 1. \end{aligned}$$

En 1984, Simonovits y Sós publican [26] como continuación de [12] y demuestran parcialmente la validez de la Conjetura 1.7:

Teorema 1.12 *Existe una constante c tal que si $t \geq 5$ y $n > ct^2$, entonces para $\varepsilon = 0, 1$ se tiene que*

$$\beta(n, P_{2t+3+\varepsilon}) = tn - \binom{t+1}{2} + 1 + \varepsilon.$$

Ellos describen también la coloración que realiza este valor y afirman que con técnicas similares a las que usan en su demostración, se podría demostrar la otra parte de la conjetura.

En este mismo contexto, en 1996 Manoussakis et. al., [20], estudian el número heterocromático de $H_{n,G}$, cuando $G \simeq S_t$, una estrella de tamaño t y obtienen los siguientes resultados. El primero es para estrellas generadoras y el segundo para estrellas de orden menor que n .

Teorema 1.13 $h(H_{n,S_n}) = \frac{n(n-3)}{2} + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$.

Notemos que si $t = 2$, $h(H_{n,S_t}) = 2$.

Teorema 1.14 *Si $3 \leq t \leq n - 2$, entonces*

$$\left\lfloor \frac{n(t-2)+4}{2} \right\rfloor \leq h(H_{n,S_t}) \leq \left\lfloor \frac{n(t-2)+t+2}{2} \right\rfloor.$$

Ellos conjeturan ahí que la cota inferior es lo mejor posible, sin embargo, recientemente Neumann-Lara y Montellano mejoran sustancialmente estos resultados obteniendo explícitamente el número heterocromático en este caso [22]:

Teorema 1.15 $h(H_{n,S_t}) = \left\lfloor \frac{n(t-2)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{n-t+2} \right\rfloor + 1$.

Sterboul estudia en [27] el número heterocromático $h(H)$, de una hipergráfica $H = (V, E)$, y lo relaciona con otro invariante $\alpha(H)$, el *número de estabilidad débil de H* , definido como la máxima cardinalidad de un subconjunto $S \subseteq V$, que no contiene aristas de H . Ahí demuestra los siguientes resultados:

Teorema 1.16 $h(H) \leq \alpha(H) + 1$.

Teorema 1.17 *Para cada terna (n, c, r) de enteros tales que $n \geq c \geq r \geq 2$, existe una r -gráfica H de orden n tal que $\alpha(H) = c - 1$ y $h(H) = c$.*

En el mismo trabajo se da una fórmula para el número heterocromático de cierto producto de hipergráficas. En la última sección define la función $\varphi(n, r, k)$, (para enteros tales que $n \geq k \geq r \geq 2$) que denota el tamaño mínimo de una r -gráfica de orden n en la que toda k -coloración es heterocromática, y establece la relación:

$$\varphi(n, r, k) \leq T(n, r, k),$$

donde $T(n, r, k)$ es la *función de Turán*, definida como el tamaño mínimo de una r -gráfica de orden n en la que cualquier subconjunto con al menos k vértices contiene una arista (es decir, $\alpha \leq k - 1$).

Posteriormente, estudia en [30], la misma función en coloraciones de 3-gráficas. Calcula específicamente $\varphi(n, 3, k)$ para $3 \leq n \leq 11$ y $3 \leq k \leq 7$ y da algunas estimaciones para valores mayores de n y k . Algunas interesantes son las siguientes:

- Si $k \leq n \leq 2k - 3$, entonces $\varphi(n, 3, k) = n - k + 1$,
- $\varphi(2k - 2, 3, k) = k$,
- Si $k \geq 4$, $\varphi(2k - 1, 3, k) = k + 1$.

Un caso aparte: la tensión de hipergráficas

En [5], es introducido el concepto de tensión de hipergráficas como extensión del concepto de conexidad para gráficas. Decimos que una k -gráfica es **tensa** si para cualquier k -coloración de sus vértices existe una arista heterocromática. Para $k = 2$ esta definición es equivalente a la de gráfica conexa. Un k -árbol es una k -gráfica tensa minimal, en el sentido de que al eliminar una de sus aristas deja de ser tensa. A los 2-árboles se les llama simplemente árboles. Un hecho interesante es que mientras que en el caso de las gráficas los árboles de orden n tienen el mismo tamaño los k -árboles de un orden dado para $k \geq 3$ no siempre tienen el mismo tamaño. Mientras que por un lado se sabe que el tamaño máximo de un k -árbol de orden n es $\binom{n-1}{k-1}$ (véase [19]), el tamaño mínimo no está aún totalmente determinado. A un k -árbol de tamaño mínimo se le llama **k -árbol mínimo**.

En el artículo [5] se introduce la función φ_n^k que determina el tamaño de un k -árbol mínimo de orden n , demostrándose que si $k = 3$, entonces $\varphi_n^3 \geq \left\lceil \frac{n(n-2)}{3} \right\rceil$. Se conjetura que esta cota es exacta, es decir que existen 3-árboles mínimos en los que la igualdad se cumple. En este mismo artículo se demuestra que la conjetura es cierta para todo n de la forma $\frac{p-1}{2}$ donde p es un número primo.

Esta función ya había sido estudiada en otros términos anteriormente por Sterboul. En la sección anterior habíamos mencionado ya algunos de sus resultados en este sentido. En [28] parece que demuestra la exactitud de la cota para el caso en que $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$.

En [32] se demuestra la validez de la conjetura para los casos en que $n \equiv 3, 4 \pmod{6}$ mediante una construcción de familias de 3-árboles mínimos que alcanzan la cota.

En [6] se contruyen familias de 3-gráficas tensas y no tensas provenientes de inmersiones de gráficas completas en superficies cerradas

y con frontera. El resultado más importante de este trabajo es la demostración de que la tensión de las triangulaciones de superficies es un invariante combinatorio y no topológico.

Posteriormente en [1] se estudian 3-gráficas provenientes de familias infinitas de triángulos en el plano euclidiano. Allí se dan teoremas de tipo general para la tensión de tales familias y se demuestra que ciertas familias de triángulos, interesantes desde el punto de vista geométrico, son tensas.

Consideremos una gráfica G de orden al menos cuatro, plana maximal, o sea tal que al agregarle una arista más ya no es plana. Por un teorema de Whitney (véase por ejemplo [13] cap. 11), G tiene una única inmersión en la esfera. Por la maximalidad de G , cada cara de esta inmersión es un triángulo. Asociaremos a G la 3-gráfica formada por sus vértices y cuyas ternas son las caras de la inmersión, claramente G es el 1-esqueleto de esta 3-gráfica.

Entonces, definiremos una **triangulación de la esfera** como una gráfica de orden al menos cuatro, plana maximal; gracias a la observación anterior podemos identificar a la triangulación con su 3-gráfica de caras. Así, si E_n es una triangulación de la esfera de orden n , podremos referirnos ella como gráfica o como 3-gráfica según el contexto en el que nos encontremos.

Definiremos también una **triangulación del disco** como una gráfica plana 2-conexa, en la que toda cara finita es un triángulo. Observemos que en cualquier triangulación del disco tenemos dos clases de vértices y aristas: los de la frontera y los interiores.

Lo que nosotros quisiéramos es determinar el número heterocromático de E_n en términos de n , sin embargo ésta es en general una tarea imposible porque este valor depende de la triangulación de que se trate,

más que del orden. Así por ejemplo en la Figura 1 se muestran dos triangulaciones de la esfera con ocho vértices que tienen número heterocromático 6 y 4 respectivamente. En cada una de ellas se da una coloración no heterocromática (con 5 y 3 colores respectivamente) para dar una idea de por qué estos números son distintos.

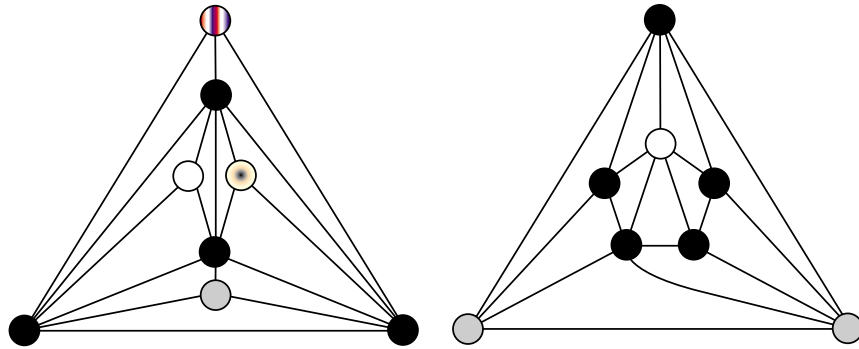


Figura 1 Triangulaciones de 8 vértices con $h = 6$ y $h = 4$.

Como no podremos determinar este valor con exactitud lo que haremos en este capítulo será analizar qué pasa con el número heterocromático de una triangulación de la esfera cuando el número de vértices crece.

Trayectorias inducidas largas

Sea E_n una triangulación de la esfera y consideremos en ella una trayectoria inducida con p vértices. Entonces E_n contiene un conjunto independiente con $\lceil \frac{p}{2} \rceil$ vértices. Si asignamos a cada uno de estos vértices

un color distinto y otro más al resto, tenemos una coloración no heterocromática de E_n con $\lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$ colores. En la Figura 2 se ilustra esta coloración.

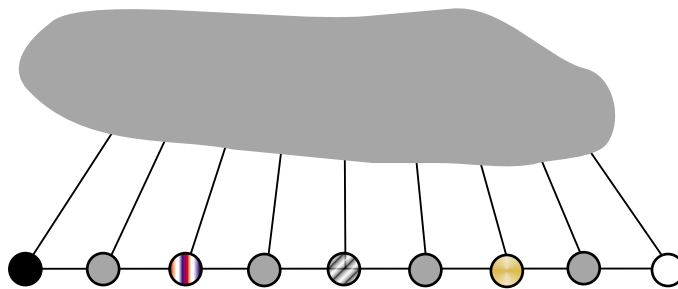


Figura 2

Así, si $p(E_n)$ es el orden de una trayectoria inducida lo más larga posible en E_n , este valor nos proporciona una cota inferior para el número heterocromático de la triangulación. Un concepto que resulta muy útil en nuestra demostración es el siguiente: Sean G una gráfica conexa y $v \in V(G)$, decimos que **colgamos a G del vértice v** , si construimos la partición de $V(G)$ en los conjuntos $\{V_0, V_1, \dots, V_{r-1}\}$, donde V_i es el conjunto de todos los vértices a distancia i desde v . La Figura 3 ilustra esta definición.

En esta definición, $r - 1 = e(v)$, la excentricidad de v , por lo que es claro que $r \leq p(G)$. Además si el grado máximo de G es $\Delta \geq 2$, la serie geométrica nos permite obtener fácilmente que:

$$|V(G)| \leq \sum_{i=0}^{r-1} \Delta^i = \frac{\Delta^r - 1}{\Delta - 1} \leq \Delta^r, \quad (2.1)$$

con lo que tenemos inmediatamente el siguiente resultado:

Lema 2.1 *Si G es una gráfica conexa de grado máximo $\Delta \geq 2$, entonces $p(G) \geq \log_{\Delta} n$.*

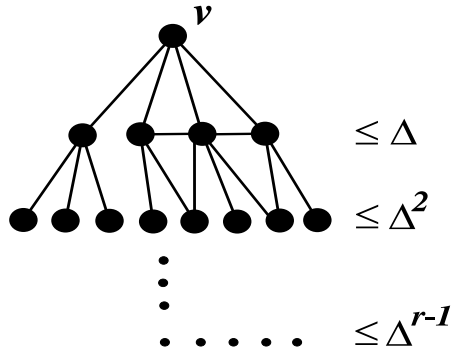


Figura 3

Demostración De la desigualdad (2.1) se tiene que: $n \leq \Delta^r \Rightarrow \log_{\Delta} n \leq r$ y como habíamos observado, $p(G) \geq r \geq \log_{\Delta} n$. \square

Notemos que si tenemos una triangulación de la esfera E_n , al eliminar cualquiera de sus vértices obtenemos una triangulación del disco y cualquier trayectoria inducida aquí, será también una trayectoria inducida en E_n .

Analizaremos entonces el problema de hallar trayectorias inducidas largas en triangulaciones del disco. Consideraremos primero el caso en que no hay vértices interiores. Obsérvese que si tal triangulación tiene t vértices entonces tiene $t - 2$ triángulos. Esto se puede probar eliminando un vértice de grado 2 y procediendo por inducción.

Lema 2.2 *Sea D_t una triangulación del disco con t vértices en la frontera y sin vértices interiores, entonces*

$$p(D_t) \geq \frac{1}{2} (\log_2(t - 2) + 3).$$

Demostración Consideremos la gráfica dual de D_t , sin la cara exterior. Esta gráfica es un árbol T de orden $t - 2$ y grado máximo a

lo más 3. Colgando este árbol de un vértice terminal se tiene que

$$t - 2 \leq 1 + \sum_{i=0}^{r-2} 2^i = 1 + \frac{2^{r-1} - 1}{2 - 1} = 2^{r-1},$$

de donde

$$\log_2(t - 2) \leq r - 1 \leq p(T) - 1.$$

Notemos que una trayectoria que realiza $p(T)$ en T representa una subgráfica de D_t formada por $p(T)$ triángulos consecutivos.

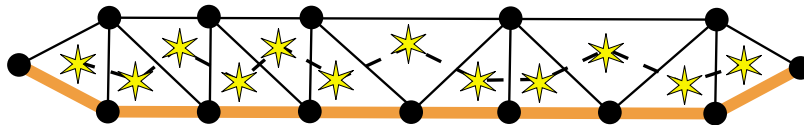


Figura 4 Las estrellas y aristas punteadas forman una trayectoria inducida en T .

Esta subgráfica contiene una trayectoria inducida de longitud al menos $\frac{1}{2}(p(T) + 2)$. En la figura anterior se indica con aristas sombreadas una trayectoria así. Ya que no hay puntos interiores, esta es también una trayectoria inducida en D_t , por lo que

$$p(D_t) \geq \frac{1}{2}(\log_2(t - 2) + 3).$$

□

Esta cota es asintóticamente exacta, la siguiente familia de triangulaciones es un ejemplo de ello. Sea $S_0 = K_3$. Si ya está construida S_i entonces S_{i+1} se obtiene agregando un vértice por cada arista de la frontera de S_i y uniéndolo a los extremos de la arista (Figura 5).

Proposición 2.3 $p(S_j) = 1 + 2 \log_2 \frac{|V(S_j)|}{3}$

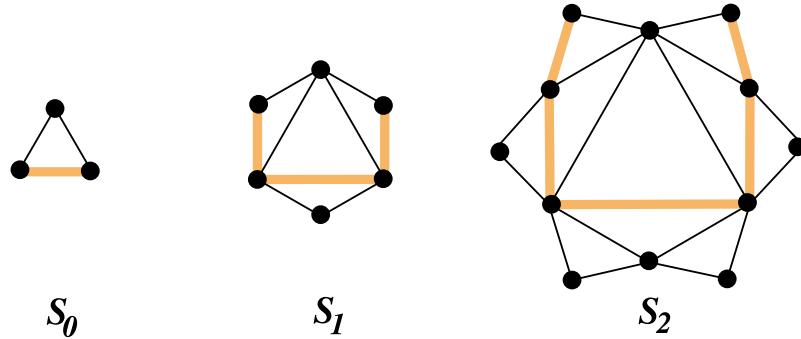


Figura 5

Demostración Notemos que $|V(S_j)| = 3(2^j)$ y por lo tanto $j = \log_2 \frac{|V(S_j)|}{3}$. En cada S_j una trayectoria inducida de longitud máxima sólo puede contener a lo más dos vértices de grado dos, estos serán sus extremos. Al eliminarlos obtenemos una trayectoria inducida en S_{j-1} con lo que

$$p(S_j) \leq p(S_{j-1}) + 2$$

Iterando esta desigualdad se obtiene que

$$p(S_j) \leq 1 + 2j = 1 + 2 \log_2 \frac{|V(S_j)|}{3}$$

Las trayectorias sombreadas en la figura alcanzan esta longitud, por lo que se tiene la proposición. \square

Consideremos ahora el caso general en que la triangulación sí tiene vértices interiores.

Lema 2.4 $p(D_t) \geq \sqrt{\log t}$.

Demostración Eliminando todos los vértices interiores de D_t , nos queda un disco seccionado por cuerdas en polígonos más pequeños (no

necesariamente triángulos). Llamemos P a esta nueva gráfica y sea T su dual, sin el vértice que corresponde a la cara exterior. Ya que P no tiene vértices interiores, T es un árbol. Asociemos a cada vértice de T el siguiente peso: el tamaño de la cara que representa en P menos dos (Figura 6).

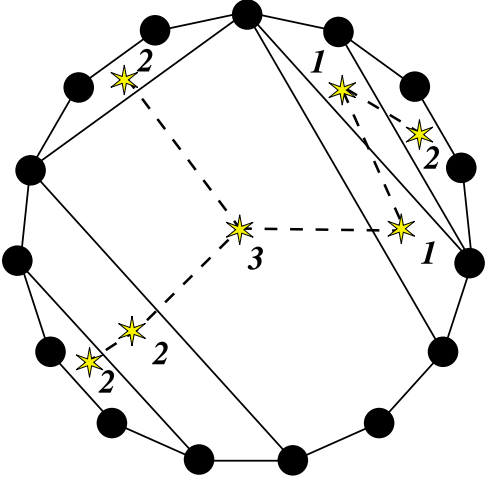


Figura 6 Las estrellas y aristas punteadas forman el árbol dual. Los números indican los pesos de cada vértice.

El peso de una trayectoria es la suma de los pesos de los vértices que la forman. Una trayectoria de peso w en T representa una subgráfica de P formada por w caras consecutivas que en total tiene $w + 2$ vértices en P (véase la Figura 7). En tal subgráfica, siempre se puede encontrar una trayectoria inducida de longitud $\frac{w}{2} + 1$. Efectivamente, si eliminamos un vértice en cada una de las caras de los extremos, tenderemos dos trayectorias inducidas en P . Al menos una de ellas tiene longitud $\frac{w}{2} + 1$.

En la Figura 7 se indica una de estas trayectorias con aristas sombreadas.

Es claro que toda trayectoria inducida en P , también lo es en D_t .

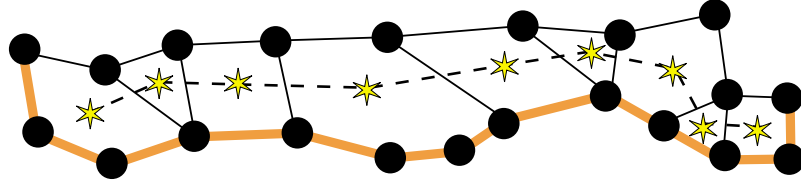


Figura 7 Las estrellas y aristas punteadas forman una trayectoria dual.

Así, la idea es encontrar una trayectoria de peso máximo en T .

Sean k el tamaño de la cara más grande en P , Δ el grado máximo en T y w_0 el peso máximo de una trayectoria en T . Notemos que $\Delta \leq k$. Si triangulamos P , tendremos una triangulación del disco sin puntos interiores. Ahí hay exactamente $t - 2$ triángulos, pero como cada cara de P tiene a lo más $k - 2$ triángulos, entonces $|V(T)| \geq \frac{t-2}{k-2}$.

Colgando T de un vértice cualquiera y mediante desigualdad (2.1) se obtiene que:

$$|V(T)| \leq \frac{\Delta^r - 1}{\Delta - 1} \leq \frac{k^r - 1}{k - 1} \leq \frac{k^r - 2}{k - 2},$$

entonces,

$$\frac{t - 2}{k - 2} \leq |V(T)| \leq \frac{k^r - 2}{k - 2},$$

de donde $t \leq k^r$. Como en esta expresión r representa el orden de una trayectoria inducida en T , entonces es claro que $r \leq w_0$. Por otro lado se tiene que $w_0 \geq k - 2 \geq \log_x k$ para una constante x suficientemente grande, y entonces $\log_x t \leq r \log_x k \leq w_0^2$ y por lo tanto $w_0 \geq \sqrt{\log_x t}$. Así $p(D_t) \geq \frac{1}{2} \sqrt{\log_x t} + 1 \geq \sqrt{\log_y t}$ para otra constante y adecuada. \square

Finalmente, podemos demostrar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 2.5 Si $f(n) = \min\{p(E_n) \mid E_n \text{ triang. de orden } n\}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty.$$

Demostración Consideremos una triangulación de la esfera que realiza $f(n)$ y llamemos Δ_n a su grado máximo. Así para cada $n \geq 4$, tendremos un cierto valor Δ_n , y por tanto obtendremos una sucesión $\{\Delta_n\}$, para la que únicamente existen dos alternativas:

- $\{\Delta_n\}$ es acotada.

Aplicando el lema 2.1 tenemos que $p(E_n) \geq \log_c n$.

- $\{\Delta_n\}$ no es acotada.

Sea v un vértice de grado máximo en E_n , entonces $D_n = E_n \setminus v$ es una triangulación del disco con Δ_n vértices frontera. Podemos hacer esto para cada $n \geq 4$, obteniendo una sucesión de triangulaciones del disco en las que la cantidad de vértices en la frontera tiende a infinito. Como $f(n) \geq p(D_n)$, por los lemas 2.2 y 2.4 tenemos el teorema.

□

Estos resultados nos dan inmediatamente el siguiente:

Teorema 2.6 $\forall h \in \mathbb{N}, \exists n_0$ tal que $\forall N \geq n_0$ cualquier triangulación de la esfera o del disco con N vértices tiene número heterocromático mayor que h .

Recordemos aquí que una triangulación del disco es una gráfica plana 2-conexa, en la que toda cara finita es un triángulo, y en ella tenemos dos clases de vértices: los de la frontera que son los que pertenecen a la cara infinita y los interiores que son todos los demás. Como en el caso de la esfera, a una triangulación del disco le asociamos su 3-gráfica de caras o sea la formada por sus vértices y sus caras finitas. De igual manera, podremos referirnos a ella como gráfica o como 3-gráfica según el contexto que se trate.

En este capítulo calcularemos el número heterocromático de estas 3-gráficas. Para esto hemos introducido el concepto de número de cubrimiento, con el que resulta mucho más sencillo trabajar.

Si H es una hipergráfica, denotaremos por $\beta(H)$ al máximo número de colores tal que existe una $\beta(H)$ -coloración no heterocromática de los vértices de H ; $\beta(H)$ es **el número de cubrimiento de H** y es claro de esta definición que $\beta(H) = h(H) - 1$, con lo que calcular uno de ellos nos dá inmediatamente el otro.

Propiedades del número de cubrimiento

Notemos que si H es una gráfica, $\beta(H)$ es simplemente su número de componentes conexas. Si f es una $\beta(H)$ -coloración no heterocromática de H , decimos que ésta es una coloración que realiza el número de cubrimiento.

Sean H_1 y H_2 dos hipergráficas cuyos números de cubrimiento son β_1 y β_2 respectivamente, se tiene que:

Proposición 3.1 *Si H_1 y H_2 son ajenas en vértices, entonces*

$$\beta(H_1 \cup H_2) = \beta_1 + \beta_2.$$

Demostración A cada H_i $i = 1, 2$ puede asignarse una coloración no heterocromática con a lo más β_i colores. Al incrementar un color en alguna de ellas aparecerá al menos una arista heterocromática. En general si $H = \cup_{i=1}^n H_i$ entonces $\beta(H) = \sum_{i=1}^n \beta(H_i)$. \square

Proposición 3.2 *Si H_1 y H_2 comparten exactamente un vértice entonces $\beta(H_1 \cup H_2) = \beta_1 + \beta_2 - 1$.*

Demostración Una coloración de H_1 que realiza β_1 , asigna un color al vértice $u \in V(H_1) \cap V(H_2)$ con lo que en H_2 se dispone de a lo más de $\beta_2 - 1$ colores para evitar que haya aristas heterocromáticas. \square

De estas proposiciones se concluye que, para calcular el número de cubrimiento, es suficiente considerar únicamente hipergráficas con 1-esqueleto biconexo.

Si $H = (V, E)$ es una hipergráfica, **un cubrimiento de H** es una gráfica $C = (V, E')$, $E' \subseteq \binom{V}{2}$, $E' \neq \emptyset$ en la que para cada arista $e \in E$,

existe una arista en C cuyo par de vértices pertenece a e . Denotaremos como $\omega(C)$ al número de componentes conexas de C . Un **cubrimiento maximal** es un cubrimiento en el que $\omega(C)$ es máximo.

Teorema 3.3 $\beta(H) = \max\{\omega(C) \mid C \text{ es un cubrimiento de } H\}$

Demostración Si C es un cubrimiento de H , éste induce naturalmente una $\omega(C)$ -coloración de H al colorear cada componente conexas de C con un color distinto. Como cada arista de H contiene al menos una arista de C , esta coloración no es heterocromática con lo que $\omega(C) \leq \beta(H) \forall C$ cubrimiento de H y por tanto, $\max\{\omega(C)\} \leq \beta(H)$. De igual manera a cada t -coloración no heterocromática de H , corresponde un cubrimiento: considerando en cada clase cromática i una gráfica generadora conexas G_i , la gráfica $C = \cup_{i=1}^t G_i$ es un cubrimiento de H con t componentes conexas. En particular, una coloración que realice $\beta(H)$ define un cubrimiento con $\beta(H)$ componentes conexas con lo que $\beta(H) \leq \max\{\omega(C)\}$. \square

Este resultado muestra que las coloraciones que realizan el número de cubrimiento, inducen cubrimientos maximales, por lo que las llamaremos **coloraciones maximales**. Al mismo tiempo este resultado da la explicación del por qué a β lo llamamos número de cubrimiento

Como queda establecido en la demostración, existe una correspondencia natural entre cubrimientos y coloraciones no heterocromáticas, lo cual nos permitirá manejar un concepto u otro indistintamente.

Sean $H = (V, E)$ una hipergráfica y $u, v \in V$. Identificando los vértices u y v en uno solo uv obtenemos una nueva hipergráfica $H/uv = (V', E')$, donde $V' = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{uv\}$ y E' está formado por todas las aristas de E que no contienen a los dos vértices u, v . Las aristas que únicamente contenían a uno de tales vértices permanecen en E' (y contienen al nuevo vértice uv). A esta operación la llamamos **la contracción de H por uv** .

Proposición 3.4 $\beta(H/uv) \leq \beta(H)$.

Demostración Cualquier coloración no heterocromática de H/uv induce una coloración no heterocromática de H con la misma cantidad de colores dando a u y v el color de uv . En particular una coloración que realice $\beta(H/uv)$. De la definición de $\beta(H)$ se sigue la desigualdad. \square

Corolario 3.5 *Si existe un cubrimiento maximal de H que contenga a la arista $e = uv$, entonces $\beta(H/uv) = \beta(H)$.*

Demostración Sea C un cubrimiento que cumple la hipótesis. La contracción de C por e es un cubrimiento de H/uv , con lo que $\beta(H/uv) \geq \omega(C/e) = \omega(C) = \beta(H)$. \square

Este hecho resulta muy útil cuando puede demostrarse que cierta pareja de vértices es arista de algún cubrimiento maximal sin conocer explícitamente cómo es el cubrimiento.

Triangulaciones sin puntos interiores

Para calcular el número heterocromático de las triangulaciones del disco, empezaremos con el caso en que no hay vértices interiores. A una triangulación de este tipo le llamamos **polígono triangulado**. Demostraremos en esta sección que el número de cubrimiento de un polígono triangulado de orden n es $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. La idea de la prueba es la siguiente, primero mostraremos que existe un tipo canónico de polígonos triangulados que tienen este número de cubrimiento y después

veremos que cualquier polígono puede ser transformado en uno de los canónicos mediante una operación que no altera el número de cubrimiento.

Un **abanico** es un polígono triangulado de orden n que tiene un vértice v de grado $n - 1$, a este vértice le llamamos el **centro del abanico**. Notemos que, salvo isomorfismo, existe un único abanico de orden n , y en lo sucesivo lo denotaremos como A_n .

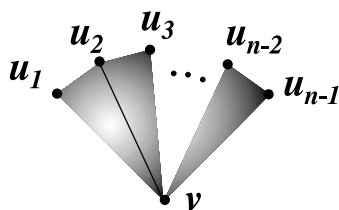


Figura 1 El abanico de orden n y centro en v .

Proposición 3.6 $\beta(A_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Demostración Sabemos que cualquier polígono triangulado de orden n tiene $n - 2$ triángulos, entonces cualquier cubrimiento de A_n tiene por lo menos $\lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ aristas ya que cada arista cubre a lo más dos triángulos. Demostremos que si C es un cubrimiento del abanico,

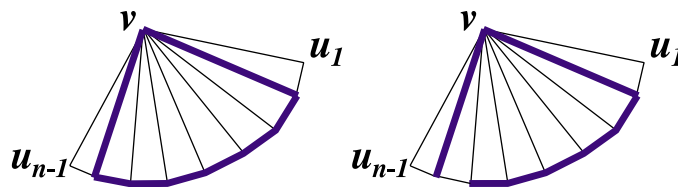


Figura 2

podemos obtener un nuevo cubrimiento acíclico con el mismo número

de componentes conexas. Si $V(A_n) = \{v, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, y v es el centro de A_n , cualquier ciclo de C es de la forma $\{v, u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+s}, v\}$, eliminando la arista $u_j u_{j+1}$ el número de componentes conexas no se altera y hemos roto un ciclo (Figura 2). Prosiguiendo esta eliminación obtenemos un cubrimiento acíclico. Por otro lado, en cualquier gráfica G se tiene que $\omega(G) = |V(G)| - |E(G)| + z(G)$, donde $z(G)$ es el número ciclomático de G , así $\omega(C) \leq n - \lceil \frac{n-2}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ para cualquier cubrimiento C de A_n , en particular para los cubrimientos maximales, por lo que $\beta(A_n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Para verificar que la otra desigualdad se cumple, basta comprobar que el cubrimiento cuyo conjunto de aristas es: $\{vu_i \mid i \text{ es par}\}$, tiene $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ componentes conexas (Figura 3). \square

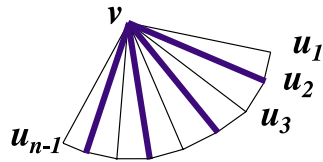


Figura 3 El abanico con un cubrimiento maximal.

Sea $e = uv$ una arista interior de una triangulación. Hay exactamente dos triángulos incidentes a e y su unión define un cuadrilátero del que e es una diagonal. Si eliminamos e y agregamos la otra dia-

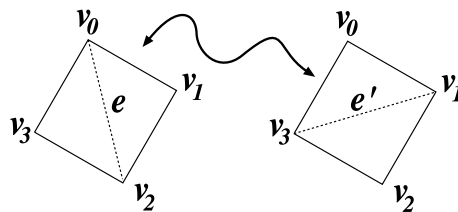


Figura 4

gonal obtenemos una nueva triangulación (Figura 4). A esta operación la llamamos **intercambio de diagonales en cuadriláteros**.

Proposición 3.7 *Todo polígono triangulado puede ser transformado en un abanico con centro en cualquiera de sus vértices intercambiando diagonales en cuadriláteros.*

Demostración Por inducción sobre el orden del polígono, que denotaremos por n . Hasta $n = 5$ la proposición se cumple trivialmente. Supongamos que es cierta para polígonos de orden menor que n . Sea v un vértice de un polígono de orden n . Ya que no existen vértices interiores sólo hay dos casos posibles (Figura 5):

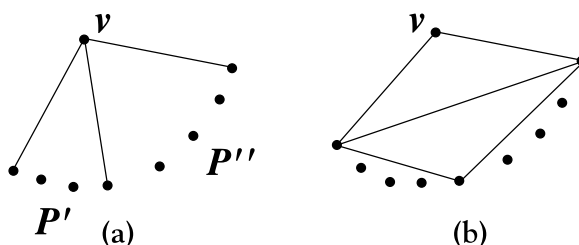


Figura 5

- (a) El grado de v es mayor o igual que tres. Entonces v es incidente a una arista interior que divide al polígono en dos polígonos de orden menor. Por hipótesis de inducción ambos pueden ser transformados en abanicos con centro en v intercambiando diagonales en cuadriláteros, la triangulación resultante será un abanico de orden n con centro en v .
- (b) El grado de v es igual a dos. Entonces las dos aristas incidentes a v definen un cuadrilátero, intercambiamos las diagonales en él y aplicamos el caso anterior. □

Proposición 3.8 *El intercambio de diagonales en cuadriláteros no altera el número de cubrimiento de un polígono triangulado.*

Demostración Sea P un polígono triangulado sin vértices interiores y consideremos en él un cuadrilátero cuyos vértices son $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, (véase la Figura 4) supongamos que la diagonal que pertenece a P es la arista $e = v_0v_2$ y sea $e' = v_1v_3$ la otra. Si $P' = P - e + e'$ demostraremos que $\beta(P) = \beta(P')$.

Es suficiente mostrar que para cualquier cubrimiento C de P , existe un cubrimiento C' de P' con el mismo número de componentes conexas que C . Lo que haremos será construir C' a partir de C modificando localmente el cubrimiento, evidentemente las componentes que no tocan al cuadrilátero dado no se modifican.

Si $e \notin E(C)$ (Figura 6), existen, salvo simetría, dos formas en que C podría cubrir a los triángulos del cuadrilátero:

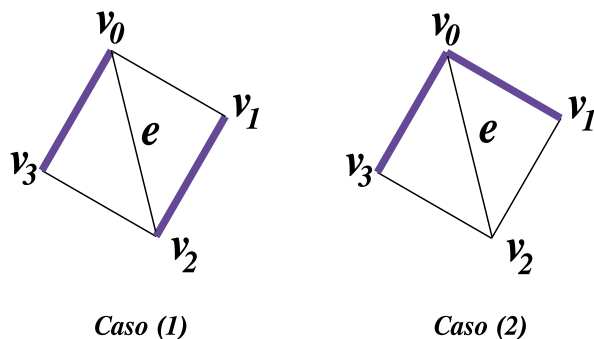


Figura 6 Las aristas sombreadas pertenecen a C .

1. $v_0v_3, v_1v_2 \in E(C)$. En este caso al intercambiar e por e' no se altera el cubrimiento por lo que $C' = C$.
2. $v_0v_3, v_0v_1 \in E(C)$. Aquí, al intercambiar e por e' , posiblemente dejamos sin cubrir el triángulo $\{v_1, v_2, v_3\}$. El nuevo cubrimiento

$C' = C + e'$, cubre ese triángulo con la misma cantidad de componentes conexas porque v_1 y v_3 ya pertenecían a una misma componente en C .

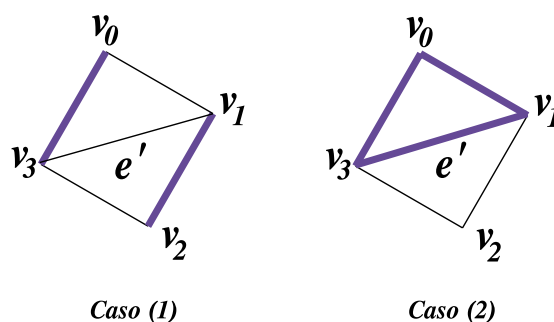


Figura 7 Las aristas sombreadas pertenecen a C' .

La Figura 7 muestra como queda C' después del intercambio en cada caso.

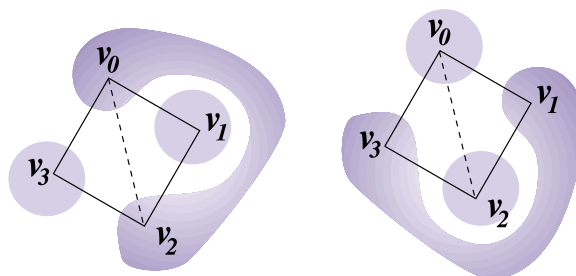


Figura 8 Casos $k_1 \neq k_0 = k_2 \neq k_3$ y $k_0 \neq k_1 = k_3 \neq k_2$.

Supongamos ahora que $e \in E(C)$ y denotemos por k_i a la componente conexas de $C - e$ que contiene al vértice v_i . Como estas componentes pueden o no ser iguales entre sí, tendremos a lo más cuatro

distintas. Analizaremos cada uno de los casos posibles. Primeramente observemos que como el polígono no tiene vértices interiores no es posible que $k_1 \neq k_0 = k_2 \neq k_3$ ó que $k_0 \neq k_1 = k_3 \neq k_2$. En la Figura 8 se muestran estos casos. Las zonas sombreadas representan las componentes de $C - e$.

Las siguientes son, salvo simetría, todas las formas posibles en que podrían estar las componentes conexas de $C - e$ en el cuadrilátero, cualquier otra es análoga a alguna de estas:

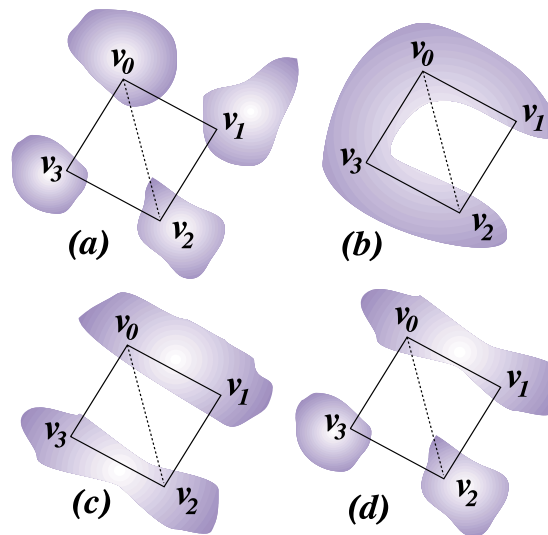


Figura 9

- (a) Si todas las componentes son distintas ó
- (b) todas son iguales ó
- (c) $k_0 = k_1 \neq k_2 = k_3$ ó
- (d) $k_0 = k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_0$

En todos estos casos haciendo $C' = C - e + e'$ la cantidad de componentes conexas en C' se conserva.

(e) $k_0 = k_1 = k_3 \neq k_2$

(f) $k_0 = k_1 = k_2 \neq k_3$.

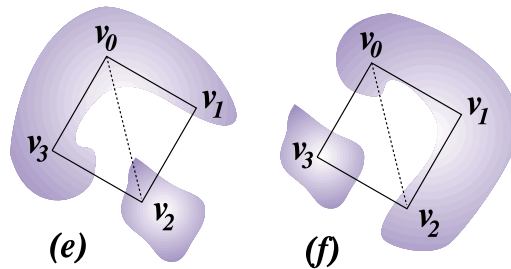


Figura 10

En ambos casos haciendo $C' = C - e + v_0v_1 + v_1v_2$ la cantidad de componentes conexas en C' se conserva. \square

Las tres proposiciones anteriores demuestran el siguiente:

Teorema 3.9 *El número de cubrimiento de un polígono triangulado de orden n es $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.*

Triangulaciones con puntos interiores

El cálculo del número de cubrimiento de triangulaciones del disco con vértices interiores es más complicado ya que existen triangulaciones con

la misma cantidad de vértices que tienen distinto número de cubrimiento. Un ejemplo de este hecho se ilustra en la Figura 11, que muestra dos triangulaciones del mismo orden.

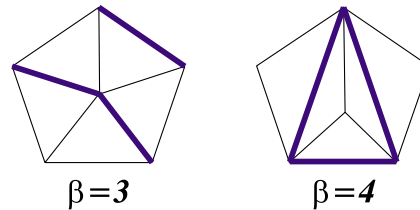


Figura 11

En el primer caso $\beta = 3$ y en el segundo $\beta = 4$. Las aristas marcadas muestran en ambos casos cubrimientos que realizan estos números.

Sin embargo, en esta sección daremos cotas para el número de cubrimiento en el caso general, en términos del número de vértices en la frontera y del número de vértices interiores de la triangulación. Para esto nos valdremos del resultado obtenido para polígonos triangulados.

La Cota Inferior

Proposición 3.10 *Sea $D_{n,m}$ una triangulación del disco con n vértices en la frontera y m interiores, entonces $\beta(D_{n,m}) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.*

Demostración Consideremos la subgráfica inducida por los vértices interiores de la triangulación. Identifiquemos cada componente conexa de esta subgráfica con algún vértice adyacente en la frontera. Obtenemos así un polígono triangulado de orden n (Figura 12). La Proposición 3.4 y el Teorema 3.9 verifican la desigualdad. \square

Esta cota se alcanza para cualquier valor de m . Los polígonos triangulados y las ruedas son una muestra de ello para los casos $m = 0, 1$.

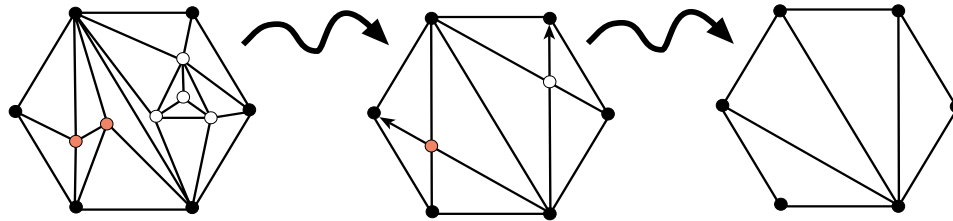


Figura 12

Podemos construir una familia de triangulaciones del disco en la que esta cota se alcanza para cada $m \geq 2$ utilizando precisamente ruedas.

Tomemos dos ruedas con al menos cuatro vértices en la frontera, si las pegamos mediante una arista de la frontera tendremos una triangulación del disco con dos vértices interiores (Figura 13).

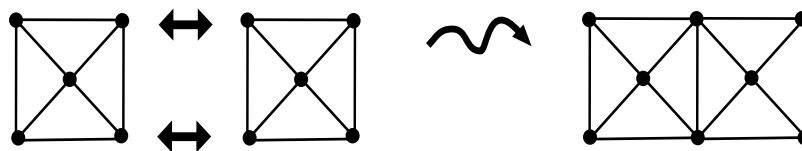


Figura 13

A esta triangulación le pegamos del mismo modo otra rueda con la condición de que en la triangulación resultante, cada rueda tenga al menos dos aristas consecutivas en la frontera. Garantizaremos que esta condición se cumpla siempre que tomemos ruedas con al menos cuatro vértices en la frontera. Continuando este proceso podemos obtener triangulaciones con m puntos interiores para cualquier valor de m . En la Figura 14 vemos esta construcción con R_4 para los primeros valores de m .

En esta familia de triangulaciones se alcanza la cota inferior. Ob-

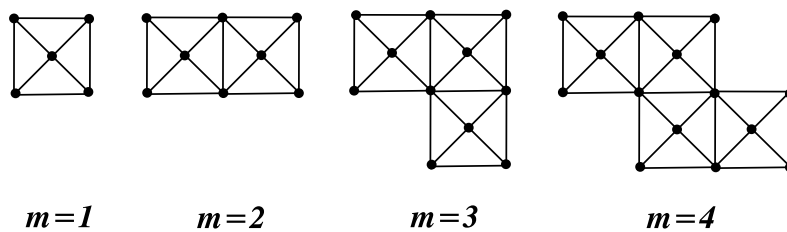


Figura 14

servemos que por construcción, en cada una de ellas sucede que cada vértice interior u es adyacente a dos aristas consecutivas en la frontera mediante tres aristas interiores a, b, c . La subgráfica inducida por u y a, b, c es un abanico (Figura 15).

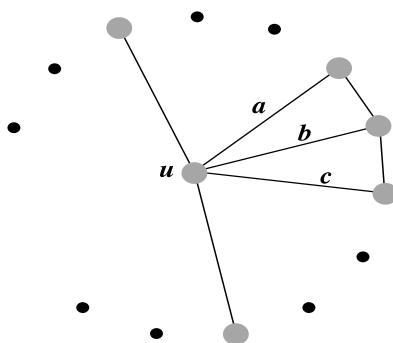


Figura 15

Demostremos que existe un cubrimiento maximal que contiene alguna de las aristas a, b ó c . Efectivamente si C es un cubrimiento que no contiene ninguna de estas aristas entonces forzosamente las dos aristas de la frontera están en C . Sustituyendo estas dos aristas por b se obtiene un nuevo cubrimiento que no tiene menos componentes conexas que C . Contrayendo la arista que está en un cubrimiento

maximal tendremos una triangulación con un vértice interior menos y por el corolario 3.5 esta nueva triangulación tiene el mismo número de cubrimiento que la original. Después de hacer este proceso para cada vértice interior, tendremos un polígono triangulado con la misma cantidad de vértices en la frontera y con el mismo número de cubrimiento que la triangulación original. En la Figura 16 se muestra con aristas sombreadas, un cubrimiento maximal que realiza la cota.

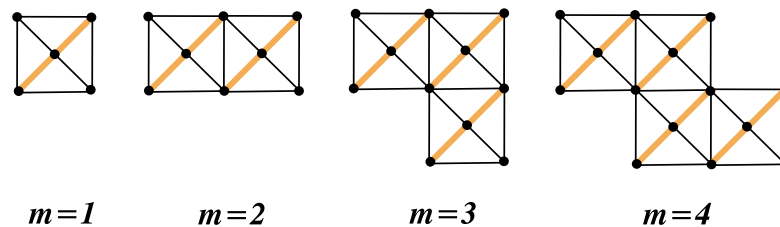


Figura 16 Las aristas sombreadas indican un cubrimiento maximal.

Existen parejas de números n, m para los cuales no es posible encontrar una triangulación $D_{n,m}$ en la que se alcance esta cota. Por ejemplo si $n = 3$ la cota sólo se alcanza cuando $m = 0$ ó 1 . El problema de encontrar una cota inferior que se alcance para cualquier par n, m está abierto.

La Cota Superior

Un resultado clásico del topología establece que no existe una retracción continua del disco a su frontera. De este hecho existe una versión combinatoria y que en forma simplificada puede ser enunciada como sigue:

Lema 3.11 (de Sperner) *Consideremos una triangulación de la esfera, supongamos que en su inmersión en la esfera elegimos un triángulo*

t y lo eliminamos, obteniendo así una triangulación del disco con tres vértices en la frontera: los correspondientes a *t*. Si coloreamos los vértices de modo que el triángulo exterior sea heterocromático, entonces, sin importar como se hayan coloreado el resto de los vértices, existe un triángulo interior heterocromático.

Demostración Debido a la importancia que tiene este resultado para nuestro trabajo presentaremos aquí dos de sus demostraciones más conocidas. Si la primera nos recuerda ligeramente los métodos de la Teoría de Homología, la segunda es puramente combinatoria y bella por su simplicidad. Para las dos demostraciones sea $G = (V, E)$ una triangulación de la esfera entendida como gráfica. Sean además T el conjunto de ternas definidas por las caras de G inmersa en la esfera y $t' \in T$.

- Primera demostración

Consideremos primero el grupo libre conmutativo generado por todos los pares no ordenados del conjunto de colores $\{1, 2, \dots, n\}$. Hagamos cociente por las relaciones siguientes:

$$(i) \{\alpha, \alpha\} = 0 \quad \forall \alpha \in \{1, 2, \dots, n\};$$

$$(ii) \{\alpha, \beta\} + \{\alpha, \beta\} = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Tenemos así un grupo Γ . Sea $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ una coloración heterocromática en t' . Para cada arista $e = uv \in E$, definamos $f(e) = \{f(u), f(v)\} \in \Gamma$. Cada terna, $t = uvz$ define tres aristas $e_1 = uv$, $e_2 = vz$ y $e_3 = zu$ por lo que definiremos $f(t) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \in \Gamma$. Es fácil ver que una terna t es heterocromática si y sólo si $f(t) \neq 0$.

Sea $F = \sum_{t \in T} f(t)$. Como G es una triangulación de la esfera, cada elemento de E contribuye exactamente dos veces a la suma de F y por (ii), tenemos que $F = 0$. Por otro lado si ninguna terna

$t \in T - t'$ fuera heterocromática, tendríamos que $F - f(t') = 0$, contradiciendo que t' es heterocromática.

- Segunda demostración

Sea $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ una coloración de los vértices de G heterocromática en t' . Pensemos a G dibujada en la esfera y consideremos su gráfica dual $D(G)$. Sea $G^* \subseteq D(G)$ la subgráfica generadora formada por aquellas aristas que cruzan aristas bicromáticas de G (Figura 17). Observemos que:

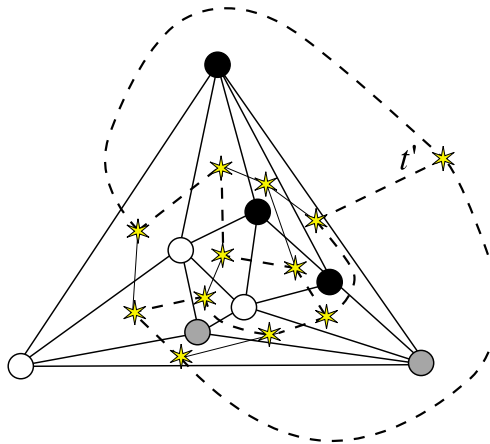


Figura 17 Las aristas punteadas son las de G^* .

- (a) Una cara de G es monocromática si y sólo si el grado del correspondiente vértice en G^* es cero.
- (b) Una cara de G es bicromática si y sólo si el grado del correspondiente vértice en G^* es dos.
- (c) Una cara de G es heterocromática si y sólo si el grado del correspondiente vértice en G^* es tres.

El grado del vértice correspondiente a t' es tres, pero como en toda gráfica el número de vértices de grado impar es par tiene que existir al menos otro vértice en G^* de grado tres.

□

Este lema nos ayuda significativamente. Veamos, a lo largo de todo este trabajo estamos considerando triangulaciones de discos y esferas y sus 3-gráficas de caras. Existe sin embargo, otra 3-gráfica en la que podríamos habernos fijado: sobre el mismo conjunto de vértices incluyamos como ternas de la 3-gráfica a *todas* aquellas que formen un triángulo en el 1-esqueleto de la triangulación. Esta 3-gráfica tiene, en general, más ternas que la primera, sin embargo, gracias al lema de Sperner es muy simple verificar que los números heterocromáticos de ambas 3-gráficas coinciden, ya que si existe un triángulo heterocromático que no es cara de la triangulación, entonces él es un triángulo triangulado y por el lema de Sperner contiene otro triángulo heterocromático que sí es cara de la triangulación.

Enseguida demostraremos una generalización muy interesante de este lema que es la clave para encontrar cotas superiores del número heterocromático de triangulaciones del disco.

Decimos que una t -coloración de C_n , el ciclo de orden n , es **tricromática** si para toda triangulación del disco, con n vértices en la frontera, y toda coloración de sus vértices cuya restricción a su frontera coincida con la coloración de C_n , existe un triángulo heterocromático. Es evidente que $t \geq 3$ si la coloración es tricromática.

En estos términos, el Lema de Sperner dice que toda 3-coloración de C_3 es tricromática. Lo que haremos será dar una versión del lema para cualquier número de colores y ciclos de cualquier orden. Este resultado nos permitirá caracterizar las coloraciones tricromáticas.

Consideremos ahora el grupo fundamental de la gráfica completa K_t , cuyos vértices representan a los elementos del conjunto de t colores. Más explícitamente, estamos trabajando con el grupo de homotopía

del complejo simplicial formado por t vértices y todos los pares no ordenados de ellos. Así, un ciclo t -coloreado, representa un camino cerrado en K_t y pertenece a alguna clase de homotopía. Diremos que una coloración de C_n es **esencial**, si representa un camino cerrado que pertenece a una clase de homotopía no nula. Una coloración no esencial es llamada **contraíble**. Nuevamente es fácil notar que los ciclos monocromáticos y bicromáticos no son esenciales por lo que el caso interesante es cuando $t \geq 3$. Además, es obvio que cualquier n -coloración de C_n es esencial.

Notemos, que por la definición de este grupo, un ciclo coloreado es contraíble si y sólo si puede ser reducido a un punto mediante el uso repetido de las siguientes dos operaciones:

- Identificar dos vértices del mismo color que estén a distancia menor o igual que dos;
- Eliminar vértices de grado uno.

Para la demostración del siguiente teorema necesitaremos una definición. Sean D una triangulación del disco y $e \in E(D)$ una arista que no es una cuerda (o sea que está en la frontera o alguno de sus vértices es interior). En general D/e no es una triangulación del disco. Daremos una construcción que nos permitirá obtener una triangulación del disco al identificar los dos vértices de e . Sea L el conjunto de todos los vértices de D adyacentes a ambos vértices de e . Si $a, b \in L$ diremos que $a \preceq b$ si el punto del plano correspondiente al vértice a está en el disco cuya frontera es el triángulo definido por e y b (Figura 18). Esta es una relación de orden en L .

Es fácil ver que este orden tiene exactamente dos elementos maximales si la arista es interior y exactamente un elemento maximal si la arista está en la frontera. Así, tenemos a lo más dos triángulos formados por e y un elemento maximal de L . Si eliminamos todos los vértices de D cuyos correspondientes puntos del plano están en el interior de

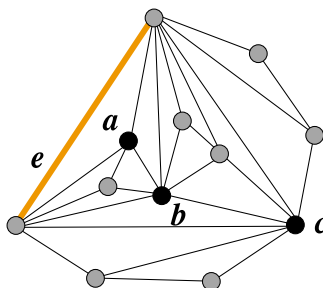


Figura 18 $a \preceq b \preceq c$

alguno de estos triángulos y contraemos por la arista e , sí se obtiene una triangulación del disco. Llamaremos a esta operación **contracción fuerte de D por e** .

Teorema 3.12 *Una coloración de C_n es esencial si y sólo si es tricromática.*

Demostración Consideremos una coloración esencial de C_n . Demostraremos por inducción sobre n que tal coloración es tricromática. Si $n = 3$ el resultado es inmediato del Lema de Sperner. Supongamos que es cierto para ciclos coloreados de longitud menor que n .

Sea D una triangulación del disco con n vértices en la frontera y coloreada de tal modo que no tiene caras tricolores y que es esencial en la frontera.

- Si D tiene una cuerda, ésta divide su frontera en dos ciclos coloreados y al menos uno de ellos es esencial. Por hipótesis de inducción la coloración en este ciclo es tricromática y por tanto D tiene una cara tricolor, contradicción.
- Si D no tiene cuerdas. Entre todas las triangulaciones que cumplen las propiedades de D tomemos una D_0 tal que el número

de vértices interiores, sea mínimo. Sean u y v dos vértices consecutivos en la frontera de D_0 , si ambos tienen el mismo color, contrayendo fuertemente la arista que los une obtendremos una triangulación cuya frontera es un ciclo de longitud menor que n en el que la coloración asignada no es tricromática. Esto contradice la hipótesis de inducción, por lo que u y v deben tener colores distintos. Sea z el vértice con el cual u, v forman una cara. Notemos que z es un vértice interior porque estamos suponiendo que no hay cuerdas. Este triángulo no es heterocromático. Luego, alguna de las aristas uz o vz es monocromática. En cualquier caso, contrayendo fuertemente la arista monocromática tendremos una triangulación con las mismas características que D_0 pero con menos vértices interiores, contradiciendo la minimalidad de D_0 .

Para el recíproco usaremos nuevamente inducción sobre n .

Si $n = 3$ una t -coloración es contraíble si y sólo si $t \leq 2$ y ya habíamos observado que estas coloraciones no son tricromáticas.

Supongamos que para ciclos coloreados de longitud menor que n toda coloración contraíble es no tricromática.

Sea $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n, v_1)$, y f una coloración contraíble, demostraremos que f no es tricromática. Por ser f contraíble, sucede al menos uno de los dos casos siguientes:

- existe una arista monocromática, digamos $v_n v_1$,
- existen tres vértices digamos v_{n-1}, v_n, v_1 tales que $f(v_{n-1}) = f(v_1)$.

En ambos casos, agregando la arista $v_{n-1} v_1$ obtenemos un ciclo $C' = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_1)$ de longitud menor que n . La restricción de f a C' es evidentemente contraíble y por hipótesis de inducción, no es tricromática.

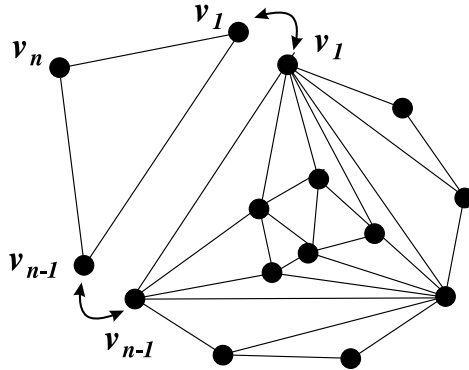


Figura 19

Existen, entonces, una triangulación del disco y una coloración de sus vértices que en su frontera coincide con C' y no tiene triángulos heterocromáticos. Añadiendo a esta triangulación el triángulo $(v_{n-1}, v_n, v_1, v_{n-1})$, (Figura 19) se demuestra que f no es tricromática. \square

Introduciremos ahora un nuevo invariante que será de mucha utilidad en este trabajo y que por sí sólo luce muy interesante. Sea ε_n el máximo número t para el cual existe una t -coloración de C_n contraíble. A este número le llamamos la **esencialidad** de C_n . Es evidente que $\varepsilon_3 = 2$. Como veremos, la esencialidad tiene gran relación con el número heterocromático de las triangulaciones del disco.

Proposición 3.13 $\varepsilon_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

Demostración Consideremos un polígono triangulado de orden n . Por el Teorema 3.9 sabemos que existe una coloración no heterocromática de sus vértices con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ colores. Esta es una coloración no tricromática de C_n , y por el resultado anterior es contraíble. Así $\varepsilon_n \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Para la otra desigualdad hay que demostrar que cualquier coloración de C_n con más de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ colores es esencial; lo haremos por inducción sobre n . Hasta $n = 4$ se cumple trivialmente. Supongamos que es cierto para ciclos de longitud menor que n .

Si tenemos una coloración contraíble de C_n con al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ colores, entonces existe un vértice v de un color que no se repite porque hay muchos colores, de hecho, más de la mitad del número de vértices. Como la coloración es contraíble, los vecinos de v tienen ambos el mismo color. Entonces, si contraemos v con sus vecinos, perderemos un color, y dos vértices, obteniendo un ciclo de orden $n - 2$ coloreado con al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 2$ colores. Por hipótesis de inducción esta es una coloración esencial de C_{n-2} , por lo que la coloración de C_n es esencial también, contradicción. \square

Sea $D_{n,m}$ es una triangulación del disco con n vértices en la frontera y m interiores. En términos del nuevo parámetro, el Teorema 3.9 y la Proposición 3.10 se expresan respectivamente como:

- $\beta(D_{n,0}) = \varepsilon_n$
- $\beta(D_{n,m}) \geq \varepsilon_n$

El resultado siguiente proporciona una cota superior para el caso general.

Proposición 3.14 $\beta(D_{n,m}) \leq \varepsilon_n + m$

Demostración Si coloreamos los vértices de $D_{n,m}$ con más de $\varepsilon_n + m$ colores, al menos $\varepsilon_n + 1$ de ellos están en la frontera. Entonces esta es una coloración esencial de C_n y por el Teorema 3.12 es tricromática. \square

Al igual que la cota inferior, esta cota también es exacta. Describiremos una familia de triangulaciones que la alcanza.

Tomemos una rueda y peguemos un triángulo a cada una de sus aristas en la frontera. Esta es una triangulación del disco con un punto interior. La frontera de la rueda original forma un cubrimiento maximal de la triangulación con $\varepsilon_n + 1$ componentes conexas (Figura 20).

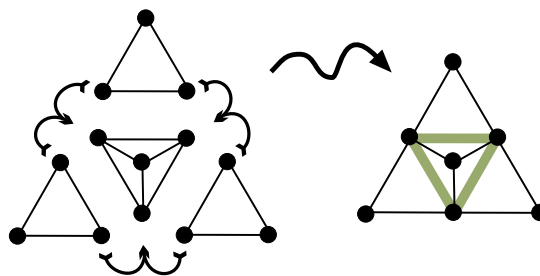


Figura 20

Para $m \geq 2$ obtenemos a partir de ésta, una nueva triangulación con m puntos interiores. A un triángulo con dos aristas en la frontera lo subdividimos como rueda y pegamos en cada una de sus aristas frontera dos nuevos triángulos. En la Figura 21 se muestran los primeros elementos de esta familia formados a partir de R_3 .

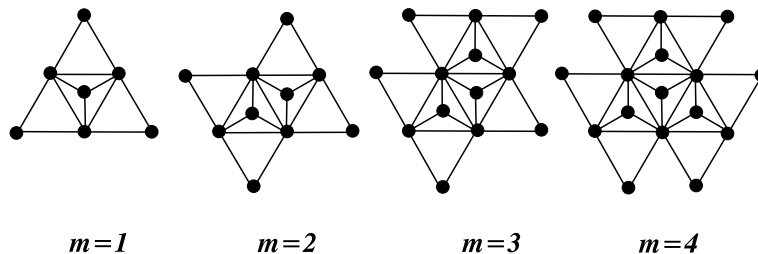


Figura 21

El número de cubrimiento de estas triangulaciones es $\varepsilon_n + m$, ya que el cubrimiento definido por la frontera de los triángulos subdivididos tiene este número de componentes conexas y la Proposición 3.14

nos muestra que es maximal. En la Figura 22 se muestran con líneas sombreadas las aristas de estos cubrimientos.

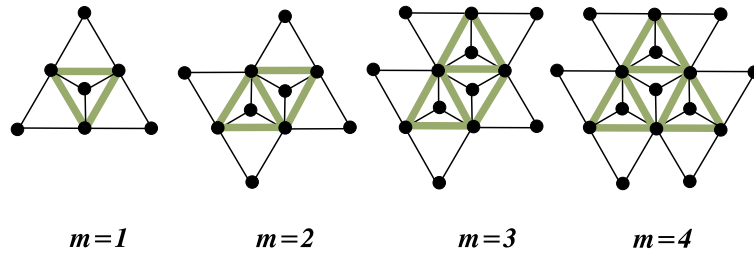


Figura 22

Bibliografía

- [1] B. Abrego, J.L. Arocha, S. Fernández-Merchant, y V. Neumann-Lara. Tightness Problems in the Plane. *en prensa en Discrete Mathematics*, 1998.
- [2] N. Alon. On a Conjecture of Erdős, Simonovits and Sós Concerning Anti-Ramsey Theorems. *Journal of Graph Theory*, 1:91–94, 1983.
- [3] N. Alon, R. Brualdi, y B. Shader. Multicolored Forest in Bipartite Decompositions of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, (B)* 53:143–148, 1991.
- [4] N. Alon y H. Lefmann. On an Anti-Ramsey Type Result. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 60. Sets, Graphs and Numbers, Budapest (Hungary):9–22, 1991.
- [5] J. L. Arocha, J. Bracho, y V. Neumann-Lara. On the Minimum Size of Tight Hypergraphs. *Journal of Graph Theory*, 16(4):319–326, 1992.
- [6] J.L. Arocha, J. Bracho, y V. Neumann-Lara. Tight and Untight Triangulated Surfaces. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 63(4):185–199, 1995.
- [7] L. Babai. An Anti-Ramsey Theorem. *Graphs Combin.*, 1:23–28, 1985.

- [8] S. A. Burr, P. Erdős, P. Frankl, R. Graham, y V. Sós. Further Results on Maximal Anti-Ramsey Graphs. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, 1:193–206, 1991.
- [9] S. A. Burr, P. Erdős, R. Graham, y V. Sós. Maximal Antiramsey Graphs and the Strong Chromatic Number. *Journal of Graph Theory*, 13 (3):263–282, 1989.
- [10] F. Chung y R. Graham. Edge-colored Complete Graphs with Precisely Colored Subgraphs. *Combinatorica*, 3:315–324, 1983.
- [11] P. Erdős y M. Simonovits. A Limit Theorem in Graph Theory. *Studia Sci. Math Hung.*, 1:51–57, 1966.
- [12] P. Erdős, M. Simonovits, y V. Sós. Anti-Ramsey Theorems. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 10. Infinite and Finite Sets, Keszthely (Hungary):633–643, 1973.
- [13] H. Frank. *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Co., USA, 1969.
- [14] A. Frieze y B. Reed. Polychromatic Hamilton Cycles. *Discrete Mathematics*, 118:69–74, 1993.
- [15] R. Graham, B. Rothschild, y J. Spencer. *Ramsey Theory*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, 1980.
- [16] G. Hahn y C. Thomassen. Path and Cycle Sub-Ramsey Numbers and an Edge-colouring Conjecture. *Discrete Mathematics*, 62:29–33, 1986.
- [17] Y. Kohayakawa y T. Luczak. Sparse Anti-Ramsey Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, (B) 63:146–152, 1995.
- [18] B. Llano. *Ecuaciones tensas y no tensas*. Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias, UNAM, 1996.

- [19] L. Lovász. Topological and Algebraic Methods in Graph Theory. In *Graph Theory and Related Topics*. Academic Press, 1979.
- [20] Y. Manoussakis, M. Spyratos, S. Tuza, y M. Voigt. Minimal Colorings for Properly Colored Subgraphs. *Graphs and Combinatorics*, 12:345–360, 1996.
- [21] J.J. Montellano y V. Neumann-Lara. On the Lineal Heterochromatic Number of Complete Graphs. Publicaciones Preliminares, Insitituto de Matemáticas, UNAM, 1996.
- [22] J.J. Montellano y V. Neumann-Lara. Comunicación Personal, 1998.
- [23] R. Rado. Anti-Ramsey Theorems. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 10. Infinite and Finite Sets, Keszthely (Hungary):1159–1168, 1973.
- [24] F. Ramsey. On a Problem of Formal Logic. *Proc. London Math. Soc.*, 30:264–286, 1930.
- [25] V. Rödl y Z. Tuza. Rainbow Subgraphs in Properly Edge-colored Graphs. *Random Structures Algorithms*, 3 no. 2:175–182, 1992.
- [26] M. Simonovits y V. T. Sós. On Restricted Colourings of \mathbb{K}_n . *Combinatorica*, 4 (1):101–110, 1984.
- [27] F. Sterboul. A New Combinatorial Parameter. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 10. Infinite and Finite Sets, Keszthely (Hungary):1387–1404, 1973.
- [28] F. Sterboul. A Problem in Constructive Combinatorics and Related Questions. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 18. Combinatorics, Keszthely (Hungary):1049–1064, 1976.

- [29] F. Sterboul. An Extremal Problem in Hypergraph Coloring. *Journal of Combinatorial Theory*, (B) 22:159–164, 1977.
- [30] F. Sterboul. Smallest 3-graphs Having a 3-colored Edge in Every k -coloring. *Discrete Mathematics*, 27:205–210, 1979.
- [31] F. Sterboul y D. Wertheimer. Colorations Extremes dans les Hypergraphes. In *Annals of Discrete Mathematics*, 17, pages 605–612, Proceedings of the International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics, University of Marseille-Luminy, 1981. North-Holland Mathematics Studies.
- [32] J. Tey. 3-gráficas Tensas Mínimas: Casos 3,4 (mod6). Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, UNAM, 1997.